Mémoire

Sur l'intégration des équations différentielles.

§ 1er.

Le nombre des équations différentielles, que l'on peut intégrer en termes finis, étant très peu considérable, on a depuis longtemps eu recours aux substitutions, pour de semblables équations, à l'intégration par séries à l'intégration directe. Ainsi, par exemple, étant donnée une équation différentielle du premier ordre entre x et y considérés comme fonction de x, avec la valeur particulière y_0 de la fonction y, correspondante à la valeur particulière x_0 de la variable x, on a supposé la fonction y développée par la formule de Maclaurin ou plutôt de Stirling en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x; et comme on pouvait facilement déterminer les coefficients des diverses puissances de x dans cette série, en les déduisant des valeurs connues des quantités x_0, y_0 à l'aide de l'équation donnée et de ses dérivées des divers ordres, et en laissant d'ailleurs arbitraire la constante y_0; on en a conclu que toute équation différentielle du premier ordre entre x et y admettait une intégrale générale, et que cette intégrale se trouvait représentée par la série de Maclaurin, c'est à dire, par la somme de cette série, les coefficients étant

déterminée, comme on vient de l'expliquer, en fonction de x_0 et de la constante arbitraire y_0. Toutefois les considérations précédentes ne donnaient nulle certitude que l'on eût effectivement intégré l'équation proposée, ni même que cette équation admît une intégrale. Car, d'une part, rien ne prouvait que la série obtenue fût convergente, et l'on sait que les séries divergentes n'ont pas de sommes; d'autre part, une série même convergente, qui provient du développement d'une fonction effectué à l'aide de la formule de Maclaurin, ne représente pas toujours la fonction dont il s'agit. Ainsi, en particulier, si l'on applique la formule de Maclaurin à la fonction

$$e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

on obtiendra pour développement la série convergente

$$1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \text{etc...}$$

qui représente, non la fonction donnée, mais seulement son premier terme. L'intégration par séries des équations différentielles était donc illusoire, tant qu'on ne fournissait aucun moyen de s'assurer que les séries obtenues étaient convergentes, et que leurs sommes étaient des fonctions propres à vérifier les équations proposées; en sorte qu'il fallait nécessairement ou trouver un tel moyen, ou chercher une autre méthode à l'aide de laquelle on pût établir généralement l'existence de fonctions propres à vérifier les équations différentielles, et calculer des valeurs

indéfiniment approchées de ces mêmes fonctions. La première est peut être jusqu'à présent la seule méthode qui remplisse ce double but; pour un système quelconque d'équations différentielles, ne paraît être celle que j'ai publiée dans mes leçons de Sceaux, données autrefois pour l'école Royale Polytechnique. Suivant cette méthode, étant donné, pour $x = x_0$, la valeur y_0 de la fonction y déterminée par une équation différentielle de la forme

$$dy = f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

si la supposition

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

ne rend infinie aucune des deux fonctions

$$f(x, y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \tag{2}$$

alors, pour calculer approximativement une autre valeur Y de y, correspondante à une autre valeur X de x, on interpolera entre les limites

$$x_0, \quad X$$

une série croissante ou décroissante de nouvelles valeurs de x, puis on leur fera correspondre une série d'autres nouvelles valeurs de y tellement calculées que, deux valeurs consécutives de x étant représentées par

$$x, \quad x + \Delta x,$$

et les valeurs correspondantes de y par

$$y, \quad y + \Delta y,$$

l'on ait généralement

$$\Delta y = f(x, y)\, \Delta x. \tag{3}$$

En démontrant que la dernière des valeurs de y ainsi calculées, ou celle qui doit être prise pour $x = X$ de sorte que y converge, lorsque l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de Δx, vers une limite fixe qui est fonction continue de y_0 et de X, pourra toutefois avoir une valeur numérique telle que la différence

$$X - x_0$$

ne devienne pas trop considérable, et supérieure à celle qu'une certaine condition détermine. Cela posé, on nommera

$$F(X)$$

la limite dont il s'agit, on prouvera aisément que la fonction

$$y = F(x) \qquad (2)$$

a la double propriété de vérifier l'équation (1), et de se réduire à y_0 pour $x = x_0$. Il y a plus, on déterminera dans peine les limites des erreurs que l'on peut commettre en prenant pour $F(X)$ la dernière des valeurs de y calculées à l'aide de la formule (9), dans le cas où chacune des valeurs de Δx est inférieure, abstraction faite du signe, à un très petit nombre donné δ.

Si l'on désigne par

$$A, \quad C$$

deux nombres respectivement supérieurs aux valeurs numériques des quantités (2), si de plus on désigne par

$$a$$

une quantité positive ou négative, choisie de telle manière

que, pour des valeurs de x renfermées entre les limites

$$x_0, \quad x_0 + a,$$

et pour des valeurs de y renfermées entre les limites

$$y_0 - Aa, \quad y_0 + Aa,$$

les fonctions (2) restant continues par rapport aux variables x, y, et renfermées la première entre les limites

$$-A \quad +A,$$

la seconde entre les limites

$$-C, \quad +C;$$

la condition énoncée et à laquelle devra satisfaire la différence $X - x_0$ sera que cette différence demeure comprise entre les limites $0, a$, ou, en d'autres termes, que la valeur X de x demeure elle-même comprise entre les limites

$$x_0, \quad x_0 + a.$$

Alors, si l'on nomme H la valeur numérique de $X - x_0$, et D la plus grande valeur numérique que puisse acquérir la quantité $f(x \pm \theta\lambda, y \pm \Theta A\lambda) - f(x, y)$, tandis que l'on fait varier θ et Θ entre les limites $0, 1$, x et $x \pm \theta\lambda$ entre les limites $x_0, x_0 + a$, enfin y et $y \pm \Theta A\lambda$ entre les limites $y_0, y_0 \pm Aa$; l'erreur que l'on commettra, en supposant chacune des valeurs numériques de δ inférieure à λ, et prenant pour $f(X)$ la somme des valeurs de y calculées à l'aide de la formule (3), sera plus petite que le produit

$$H e^{CH} D,$$

c'est-à-dire la base des logarithmes népériens. Supposons que, pour toutes les valeurs de x, y comprises entre les limites

$$x_0,\ x_0 + a\ ;\quad y_0 - Aa,\ y_0 + Aa$$

la fonction

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \tag{3}$$

reste finie, continue, et n'atteigne aucune valeur telle que celle-ci,

$$B$$

le facteur D ne pourra surpasser le produit

$$(B + AC)\,\delta. \tag{7}$$

L'erreur de y que la formule (4) détermine, étant toujours continue, non seulement par rapport à x, mais encore par rapport à la constante y_0, devient, lorsque cette constante est considérée comme arbitraire, ce qu'on appelle l'intégrale générale de l'équation (1). La méthode précédente fournit donc le moyen, non seulement d'établir l'existence de l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, mais encore de calculer avec tel degré d'approximation qu'on le désire la valeur Y de y correspondante à une valeur donnée X de la variable x, en supposant déjà connue une première valeur y_0 de y correspondante à une première valeur x_0 de x. Ce calcul s'étend même à des valeurs de X non renfermées entre les limites

$$x_0,\ x_0 + a.$$

Car, après avoir déduit de la première valeur de y, représentée par y_0, une seconde valeur Y_1, on pourra de celle-ci en déduire une troisième, et continuer de la

sorte jusqu'à saisir la valeur de y devenue infiniment grande ou rendue infinie l'une des fonctions (q).

La méthode que je viens de rappeler s'trouve rigoureusement établie, et rendue plus sensible par des exemples numériques dans les leçons déjà citées. J'ai montré dans ces mêmes leçons comment on pouvait étendre cette méthode à l'intégration d'équations différentielles simultanées du premier ordre, quel que fût le nombre des variables, et comment on pouvait obtenir, non seulement les intégrales générales et particulières de ces équations, mais encore leurs intégrales singulières. On sait d'ailleurs que l'intégration d'équations différentielles d'un ordre quelconque peut toujours être ramenée à l'intégration d'équations différentielles simultanées du premier ordre.

§ 2.

Les avantages qu'offre la méthode établie rappelés ci-dessus, je vais maintenant exposer celle que je vais maintenant exposer.

Le beau Mémoire où M. Hamilton a fait dépendre l'intégration des équations différentielles qu'on rencontre en dynamique, de la détermination d'une seule fonction, représentée par une intégrale définie qui satisfait à deux équations du second ordre aux différences partielles, a reporté mon idée vers un point que m'avait paru depuis longtemps digne d'être examiné avec une attention particulière

c'était parce qu'il y aurait peut être quelque avantage à réduire l'intégration d'un système d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux différences partielles du premier ordre. Or cette réduction peut toujours être facilement effectuée, comme on va le voir.

Soient $x, y, z, \ldots$ des fonctions inconnues de la variable t, déterminées par des équations différentielles du premier ordre, entre lesquelles les différentielles

$$dx, dy, dz, \ldots\ldots dt$$

des variables $x, y, z, \ldots\ldots t$

doivent respectivement proportionnelles à des fonctions connues

$$X, Y, Z, \ldots\ldots T$$

de ces mêmes variables. Les équations différentielles dont il s'agit devront comprises dans la formule

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \ldots = \frac{dt}{T},$$

et la réduiront aux suivantes

$$(2) \qquad dx = \frac{X}{T}dt, \quad dy = \frac{Y}{T}dt, \quad dz = \frac{Z}{T}dt, \ldots$$

qui ne perdront rien de leur généralité, si l'on fait disparaître le dénominateur T, en prenant simplement $dt = T$. Or supposer que les équations (2) sont intégrables, c'est admettre que $x, y, z, \ldots\ldots t$ peuvent varier simultanément de manière à les vérifier. Dans cette hypothèse $x, y, z \ldots$ variant avec t, si t prend une nouvelle valeur t'; x, y, z recevront des valeurs cor-

correspondantes $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ qui ne pourront s'annuler que pour des valeurs particulières attribuées à $x, y, z, \ldots t$: par conséquent $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ seront des fonctions de $x, y, z, \ldots t$ et τ, qui la rendront nulle pour $\tau = t$, à $x, y, z, \ldots$, entendu qu'on aura

$$(3) \quad \xi = \varphi(x, y, z, \ldots t, \tau), \quad \eta = \chi(x, y, z, \ldots t, \tau), \quad \zeta = \psi(x, y, z, \ldots t, \tau), \ldots$$

les lettres caractéristiques $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ désignant des fonctions déterminées qui vérifient les conditions

$$(4) \quad \varphi(x, y, z \ldots t, t) = x, \quad \chi(x, y, z, \ldots t, t) = y, \quad \psi(x, y, z, \ldots t, t) = z, \ldots$$

Les équations (2) ne sont censées intégrées généralement qu'autant que l'on est parvenu à exprimer $\xi, \eta, \zeta \ldots$ en fonction de τ par des équations de la forme (3), quelles que soient d'ailleurs les valeurs primitivement attribuées à

$$x, y, z, \ldots t.$$

Alors les équations (2), ou des équations équivalentes, c'est-à-dire, propres à fournir les mêmes valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots$$

c'est ce qu'on appelle les intégrales générales des équations différentielles données. A l'aide de ces intégrales, on peut déterminer, pour une valeur τ de la variable indépendante renfermée dans les équations (2), les valeurs correspondantes $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ des variables dépendantes que contiennent les mêmes équations quand on connaît un autre système de valeurs $x, y, z, \ldots$ de ces dernières variables correspondant à une autre valeur t de la première ; et comme, supposant les valeurs

$\xi, \eta, \zeta, \ldots$ les valeurs correspondantes de la variable indépendante ou devait varier, pour la valeur t de cette variable, les valeurs des variables dépendantes représentées par $x, y, z, \ldots$, il est clair que les équations (5) continueront de subsister, si l'on y échange entre eux les deux systèmes de valeurs des variables dépendantes et indépendantes représentés par

$$x, y, z, \ldots t,$$
$$\xi, \eta, \zeta \ldots \tau.$$

Donc les intégrales générales des équations (2) pourront encore se produire sous la forme

(5) $x = \varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau, t)$, $y = \chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau, t)$, $z = \psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau, t)$, ...

D'ailleurs les formules (4), étant identiques pour des valeurs quelconques de $x, y, z, \ldots t$, entraîneront les suivantes

(6) $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau, \tau) = \xi$, $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau, \tau) = \eta$, $\psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau, \tau) = \zeta$, ...

entre les valeurs de $x, y, z, \ldots$, fournies par les équations (5), se réduisant, comme on devait s'y attendre, à $\xi, \eta, \zeta \ldots$, quand on suppose $t = \tau$.

Lorsqu'on attribue à τ une valeur constante,

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots$$

deviennent dans les intégrales générales (5) ou (5') des constantes que l'on peut choisir arbitrairement, et qu'on nomme pour cette raison constantes arbitraires. Si l'on fait d'ailleurs, pour abréger

(7) $\varphi(x, y, z \ldots t, \tau) = X$, $\chi(x, y, z, \ldots t, \tau) = Y$, $\psi(x, y, z \ldots t, \tau) = Z$, ...

les équations (5) deviendront

(8) $$\xi = X, \quad \eta = Y, \quad \zeta = Z, \quad \ldots$$

$X, Y, Z, \ldots$ étant des fonctions de $x, y, z, \ldots t$ qui se réduisent la première à x, la seconde à y, la troisième à z, ... pour $t = \tau$, et qui ne renferment aucune des constantes arbitraires $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Enfin si l'on désigne par

(9) $$u = f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction déterminée des seules variables $x, y, z, \ldots$ et par

(10) $$v = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

(11) $$V = f(X, Y, Z, \ldots),$$

ce que devient la fonction v, quand on y remplace 1° les variables $x, y, z, \ldots$ 1° par les constantes arbitraires $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ 2° par les fonctions $X, Y, Z, \ldots$;

V,

ainsi que $X, Y, Z, \ldots$ dépendra uniquement des quantités

$$x, y, z, \ldots t, \tau,$$

et se réduira, pour $t = \tau$, à la nouvelle constante arbitraire désignée par v. Depuis les intégrales générales des équations (1), cette formule (8) entraînera évidemment la suivante

(12) $$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(X, Y, Z, \ldots)$$

ou

(13) $$v = V$$

qui sera une nouvelle intégrale générale et comprendra comme cas particuliers les formules (8) avec lesquelles

on la devient coïncider respectivement

$f(x,y,z,\dots) = x$, $f(x,y,z,\dots) = y$, $f(x,y,z,\dots) = z$, etc..

Concevons maintenant que,

V

désignant une fonction quelconque des quantités

$x, y, z, \dots t$ et f,

mais une fonction qui ne renferme aucune des constantes arbitraires $\xi, \eta, \zeta, \dots$ Il s'agisse de savoir si les équations (2) admettent une intégrale générale de la forme

(4) $\qquad V = \text{constante}.$

Cela revient à savoir si les valeurs de $x, y, z, \dots$ tirées des équations (3) ou (8) réduisent V à une fonction de t ou à une constante arbitraire. Or la différentielle de cette fonction ou de cette constante, réciproquement, en égard aux équations (2), ce que devient l'expression

(15) $\qquad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + \dots\right) dt,$

quand on y substitue pour $x, y, z, \dots$ leurs valeurs tirées des équations (3) ou (8). Donc ces valeurs vérifieront en vertu quel que soit t la formule

(16) $\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + \dots = 0,$

suivant que les équations différentielles proposées admettront ou non une intégrale générale de la forme (14). Différentiée, la formule (16) n'étant pas distincte de celle

Puisque entre les seules quantités renfermées dans les fonctions

$$\mathcal{X},\ \mathcal{Y},\ \mathcal{Z},\ \ldots\ \mathcal{T},\ \mathcal{V}$$

c'est-à-dire, outre les quantités

$$x,\ y,\ z,\ \ldots\ t \text{ et } \tau,$$

une relation qui devrait être une conséquence nécessaire des équations (8). Si cette dernière hypothèse ne pouvait être admise. Car on vérifie les équations (8) par des valeurs de $x,\ y,\ z,\ \ldots\ t$ et τ arbitrairement choisies et par des valeurs de

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots$$

déduites, à l'aide de ces mêmes équations des valeurs attribuées à $x,\ y,\ z,\ \ldots\ t$ et τ. La formule (16) ne peut donc être qu'une équation identique exprimant que

(17) $$s = \mathcal{V}$$

est une intégrale particulière de l'équation aux différences partielles

(18) $$\varepsilon^{\tau}\frac{\partial s}{\partial t} + \mathcal{X}\frac{\partial s}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial s}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial s}{\partial z} + \ldots = 0.$$

Ajoutons que, si l'on nomme v la valeur particulière que prend la fonction $\mathcal{V}$ quand on y pose

$$x = \xi,\ y = \eta,\ z = \zeta,\ \ldots\ t = \tau,$$

celle des intégrales générales des équations (2), qui sera de la forme (16) se réduira nécessairement à

(19) $$\mathcal{V} = v.$$

Alors aussi la formule

(20) $$s = \mathcal{V} - v$$

sera, en même temps que la formule (17), une intégrale

particulière de l'équation (18) [illegible] la valeur de cette constante pour la proposition universelle.

1er Théorème. Les équations (2), étant supposées généralement intégrables et V désignant une fonction qui ne renferme que les variables

$$x, y, z, \ldots t$$

et ces variables avec une valeur particulière t' de la variable t; pour avoir les équations (2) débarrassées de t', on substituera dans l'intégrale générale de la forme (19), à t sa valeur t', comme si la formule (17) ou (20) pouvait donner non une intégrale particulière de l'équation (18).

Cela posé, veut-on obtenir celle des intégrales générales qui devient, de la forme (19), V désignant une constante arbitraire, et V une fonction des variables $x, y, z, \ldots t$, qui ait la propriété de se réduire, pour une valeur particulière t' de la variable t, à une fonction donnée de $x, y, z, \ldots$ savoir à

$$u = f(x, y, z, \ldots)?$$

On prendra d'abord pour V la valeur de V qui a la double propriété de représenter une intégrale de l'équation (18), et de se réduire à

$$u = v$$

pour $t = t'$; on aura ensuite à prendre pour V celle des intégrales de l'équation (4) qui a la propriété de se réduire à u, pour $t = t'$.

Si, pour fixer les idées, on veut obtenir les intégrales générales des équations (2) sous la forme (6), de sorte qu'étant donné un système de valeurs des variables

$$x, y, z, \ldots t$$

ces intégrales fournissent immédiatement les nouvelles valeurs

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots$$

que prennent les variables dépendantes pour une nouvelle valeur τ de la variable indépendante, il suffira de chercher les valeurs intégrales particulières de l'équation (16), qui ont la propriété de devenir, pour $t = \tau$, égales aux variables

$$x, y, z, \ldots$$

respectivement. Si l'on désigne par

$$(21) \qquad v = X, \qquad v = Y, \qquad v = Z, \quad \text{etc.}$$

des intégrales particulières des équations $X, Y, Z, \ldots$ ne prenant respectivement que les valeurs quantités

$$x, y, z, \ldots t \text{ et } \tau,$$

on vérifiera encore l'équation (16) en attribuant à v l'une des valeurs

$$(22) \qquad v = X - \xi, \qquad v = Y - \eta, \qquad v = Z - \zeta, \ldots,$$

et, en égalant à zéro la dernière valeur de v on obtiendra, sous la forme (8), les intégrales générales des équations (2).

Nous avons jusqu'ici supposé que les équations (2) étaient généralement différentiables, sans chercher à priori cette hypo-

Donc, on peut dire que l'intégration générale de l'équation (8) entraîne l'intégration générale des équations (7), et même que, pour obtenir la intégrale générale de ces dernières équations, il suffit d'égaler à des constantes arbitraires

$$t,\ \tau,\ \xi,\ \ldots$$

les valeurs $X, Y, Z, \ldots$ de $x, y, z, \ldots$ qui ont la double propriété de vérifier l'équation (15) et de se réduire à $x, y, z, \ldots$ pour $t = \tau$.

Effectivement on obtiendra de cette manière les équations (8), en vertu de l'équation

$$x, y, z, \ldots$$

variant des fonctions de τ, qui se réduisent respectivement à

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots$$

pour $t = \tau$. Or, en faisant varier $x, y, z, \ldots$ avec τ, on obtiendra ailleurs que X est une intégrale particulière de l'équation (18), et vérifie en conséquence la formule

$$(19)\qquad \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial X}{\partial x}} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial X}{\partial y}} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial X}{\partial z}} \frac{\partial X}{\partial z} + \ldots = 0,$$

on trouvera donc la première des équations (8),

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \ldots = 0;$$

puis en éliminant de cette dernière

$$\frac{\partial X}{\partial t},$$

à l'aide de la formule (19), et opérant de la même manière pour chacune des équations (8), on trouvera

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial^0}\right)+\frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\mathcal{Y}}{\partial^0}\right)+\frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\mathcal{Z}}{\partial^0}\right)+\ldots=0, \\ \frac{\partial Y}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial^0}\right)+\frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\mathcal{Y}}{\partial^0}\right)+\frac{\partial Y}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\mathcal{Z}}{\partial^0}\right)+\ldots=0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial^0}\right)+\frac{\partial Z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\mathcal{Y}}{\partial^0}\right)+\frac{\partial Z}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\mathcal{Z}}{\partial^0}\right)+\ldots=0, \\ \text{etc...} \end{cases}$$

N'appelons maintenant que l'on combine entre elles par voie d'addition les formules (24), après les avoir multipliées par des facteurs choisis de manière que toutes les différences

$$\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial^0},\quad \frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\mathcal{Y}}{\partial^0},\quad \frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\mathcal{Z}}{\partial^0},\ \ldots$$

se trouvent éliminées à l'exception d'une seule. On obtiendra ainsi une équation (25) d'une autre équation de la forme

$$(25)\quad K\left(\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial^0}\right)=0,\quad K\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\mathcal{Y}}{\partial^0}\right)=0,\quad K\left(\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\mathcal{Z}}{\partial^0}\right)=0,\ldots$$

la valeur de K étant

$$(26)\quad K=\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z}\ldots-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial z}\ldots+\text{etc};$$

et, comme la fonction de $x, y, z, \ldots t$ représentée ici par K ne pourrait être généralement nulle, puisqu'elle se réduit à l'unité, ainsi que

$$\frac{\partial X}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial y},\quad \frac{\partial Z}{\partial z},\ \ldots$$

pour $t=\tau$, les formules (25) entraîneront les équations (2). Donc celles-ci auront pour intégrales générales les équations (8), et l'on peut énoncer la proposition suivante

2e Théorème. L'intégration des équations (18) entraîne

celle des équations (2); et, pour obtenir les intégrales générales de ces dernières, il suffit d'égaler à des constantes arbitraires $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ les intégrales particulières

$$s = X, \quad s = Y, \quad s = Z, \ldots$$

de l'équation (18), qui ont la propriété de se réduire respectivement à $x, y, z, \ldots$ pour $t = \tau$.

Les intégrales générales des équations (2) étant obtenues comme on vient de le dire, et représentées par les formules (8), la formule (19), dans laquelle

$$U = f(X, Y, Z, \ldots)$$

désigne une fonction quelconque de $X, Y, Z, \ldots$ représentera une nouvelle intégrale générale des équations (2); et, pour obtenir cette nouvelle intégrale, il suffira [voyez le 1er théorème] d'égaler z une constante arbitraire v celles des intégrales particulières de l'équation (18) qui a la propriété de se réduire à

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

pour $t = \tau$. Ajoutons que, si l'on se sert du signe caractéristique

$$\nabla$$

pour indiquer un système d'opérations effectuées sur une fonction quelconque s de $x, y, z, \ldots t$, et définies par la formule

$$\nabla s = -\int_{\tau}^{t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z} + \ldots \right) \partial t, \tag{27}$$

on tirera de l'équation (16), intégrée par rapport à t, et à partir de $t = \tau$,

$$U - u - \nabla U = 0, \tag{28}$$

ou, ce qui revient au même,

$$U = u + \nabla U \tag{29}$$

Si dans le second membre de l'équation (29) on substitue une ou plusieurs fois de suite à la fonction U sa valeur tirée de cette équation même, alors, en écrivant pour abréger

$$\nabla^2 U, \quad \nabla^3 U, \quad \text{etc....}$$

au lieu de

$$\nabla\nabla U, \quad \nabla\nabla\nabla U, \quad \text{etc....}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} U &= u + \nabla u + \nabla^2 U \\ &= u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 U \\ &= \text{etc...}, \end{aligned}$$

et généralement

$$U = u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \dots + \nabla^{n-1} u + \nabla^n U, \tag{30}$$

n étant un nombre entier quelconque. Or, dans l'équation (30), le terme $\nabla^n U$ devient indéfiniment petit pour des valeurs croissantes de n, la série

$$u, \ \nabla u, \ \nabla^2 u, \ \nabla^3 u, \ \text{etc...} \tag{31}$$

sera convergente, et cette équation donnera

$$U = u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \dots; \tag{32}$$

par suite la formule (19), propre à représenter une intégrale générale quelconque d'une équation (17) deviendra

$$u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \text{etc...} = V, \tag{33}$$

et, comme, dans le cas où ∇ désignerait non plus un système d'opérations à effectuer sur une fonction donnée,

mais une quantité véritable, l'on aurait

$$1 + \nabla + \nabla^2 + \nabla^3 + \cdots = \frac{1}{1-\nabla}, \tag{24}$$

l'intégrale générale dont il s'agit pourra être présentée sous la forme symbolique

$$\frac{u}{1-\nabla} = v. \tag{25}$$

D'ailleurs, comme on tirera de l'équation (22)

$$\nabla v = \nabla(u + \nabla u + \nabla^2 u + \cdots) = \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \cdots = v - u,$$

il est clair que la valeur de v tirée par cette équation vérifiera la formule (24), par conséquent la formule (14), tant que la série (21) sera convergente. Cela peut donc nous servir de théorème suivant.

2e Théorème. Tant que la série (21) est convergente, la formule (22) ou (25) est propre à représenter l'une quelconque des intégrales générales des équations (2).

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z} + \cdots = \square s, \tag{26}$$

l'équation (27) donnera

$$\nabla s = -\int_t^{t'} \square s \cdot \delta t. \tag{27}$$

Lorsque $\mathfrak{L}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots$ ne renfermeront pas explicitement la variable indépendante t, mais seulement les variables dépendantes $x, y, z, \ldots$, alors, en substituant z à s, dans l'équation (27), la fonction v qui ne renfermera pas non plus la variable t, on tirera successivement de cette équation

$$Vu = -\int_\tau^t \Box u \cdot dt = -\Box u \int_\tau^t dt = (\tau - t)\Box u,$$

$$\nabla^2 u = -\int_\tau^t (\tau - t)\Box^2 u \cdot dt = -\Box^2 u \int_\tau^t (\tau - t)\,dt = \frac{(\tau - t)^2}{1\cdot 2}\Box^2 u,$$

etc...

et généralement

$$\nabla^n u = \frac{(\tau - t)^n}{1\cdot 2 \cdots n}\Box^n u. \tag{24}$$

En vertu de cette dernière formule l'équation (23) devient

$$u + \frac{\tau - t}{1}\Box u + \frac{(\tau - t)^2}{1\cdot 2}\Box^2 u + \cdots = v; \tag{29}$$

si comme dans le cas où $\Box$ représenterait un plus ou moins un système d'opérations à effectuer sur une fonction donnée mais une quantité véritable, l'on aurait

$$1 + \frac{\tau - t}{1}\Box + \frac{(\tau - t)^2}{1\cdot 2}\Box^2 + \cdots = e^{(\tau - t)\Box}, \tag{25}$$

l'équation (29) pourra encore être présentée sous la forme symbolique

$$e^{(\tau - t)\Box} u = v. \tag{31}$$

Ainsi la 2e théorème entraîne le suivant:

2e Théorème. *Lorsque les fonctions*

$$\mathfrak{D}e,\ L,\ \mathfrak{L} \ldots \mathfrak{F}$$

ne renferment pas explicitement la variable indépendante t, *l'équation* (29) *ou* (31) *est propre à représenter l'une quelconque des intégrales générales des équations* (2), *tant que la série*

$$u,\ \frac{\tau - t}{1}\Box u,\ \frac{(\tau - t)^2}{1\cdot 2}\Box^2 u, \ldots \tag{32}$$

est convergente.

Si des formules (29) ou (31) on avait déduit les intégrales générales des équations (2) présentées sous

la forme (b), ou en d'autres termes les valeurs des quantités $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ qui sont ce que deviennent $x, y, z, \ldots$ considérées comme fonctions de la variable indépendante t, quand cette variable indépendante reçoit une nouvelle valeur τ, il suffira de poser successivement dans la formule (9) ou (b')

$$u = x, \quad v = \xi;$$

puis

$$u = y, \quad v = \eta;$$

puis

$$u = z, \quad v = \zeta;$$

etc... En conséquence les intégrales générales des équations (2), dont la forme (8) devait représenter dans tous les cas les fonctions demeurées finies, seront données par les formules

$$\xi = \frac{x}{1-\nabla}, \quad \eta = \frac{y}{1-\nabla}, \quad \zeta = \frac{z}{1-\nabla}, \quad \ldots; \tag{b9}$$

et, dans le cas où ∇x, ∇y, ∇z, ... ne renferment pas explicitement la variable t, par les formules

$$\xi = e^{(\tau-t)\square} x, \quad \eta = e^{(\tau-t)\square} y, \quad \zeta = e^{(\tau-t)\square} z, \quad \ldots. \tag{10}$$

Si, pour fixer les idées, on suppose que les équations (2) se réduisent à

$$\nabla x = x\,\nabla t, \quad \nabla y = y\,\nabla t, \quad \nabla z = z\,\nabla t, \ldots \tag{b'9}$$

en sorte qu'on ait

$$\frac{\nabla x}{\nabla} = x, \qquad \frac{\nabla y}{\nabla} = y, \qquad \frac{\nabla z}{\nabla} = z, \ldots$$

on tirera de la formule (35), en y remplaçant s par u,

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u}{\partial z} + \ldots = \square' u \tag{46}$$

Si d'ailleurs on prend pour u une fonction homogène de

premier degré en $x, y, z \ldots$, on aura identiquement

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots = u;$$

par conséquent l'équation (46) donnera

$$\square u = u,$$

et l'on pourra poser simplement $\square = 1$ dans les formules (41) (44) qui deviendront respectivement

$$(47) \qquad v = ue^{-t},$$

$$(48) \qquad \xi = xe^{-t}, \quad \eta = ye^{-t}, \quad \zeta = ze^{-t}, \ldots$$

Celles-ci ne sont en effet les intégrales générales des équations (49), intégrales qu'on peut encore écrire comme il suit,

$$(49) \qquad x = \xi e^{t-\tau}, \quad y = \eta e^{t-\tau}, \quad z = \zeta e^{t-\tau}, \ldots$$

et dans lesquelles $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ peuvent être considérées comme représentant les constantes arbitraires remplacées par l'intégration.

Lorsqu'on remplace v par u dans la formule (35), on en tire

$$(50) \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial^0}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathfrak{M}}{\partial^0}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\mathfrak{L}}{\partial^0}\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots = \square u.$$

Si $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}, \ldots \partial^0$ ne renfermant pas explicitement la variable τ, alors, en désignant par K une quantité constante, et choisissant la fonction u de manière à vérifier l'équation

$$(51) \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial^0}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathfrak{M}}{\partial^0}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\mathfrak{L}}{\partial^0}\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots = Ku,$$

on aura identiquement

$$(52) \qquad \square u = Ku.$$

et la formule (21), réduite à

$$v = ce^{K(t'-t)},$$

ou, ce qui revient au même, à

$$u = Ue^{K(t-t')}, \tag{23}$$

devra pouvoir être représentée par une intégrale générale des équations (2).

Pour montrer une application des formules (21) ... et (23), supposons que les équations (2) soient de la forme

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z + \dots, \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z + \dots, \quad \frac{dz}{dt} = a_3x + b_3y + c_3z + \dots, \tag{24}$$

$a_1, b_1, c_1, \dots a_2, b_2, c_2, \dots a_3, b_3, c_3, \dots$ étant des quantités constantes. L'équation (21) deviendra

$$(a_1x + b_1y + c_1z + \dots)\frac{\partial v}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2z + \dots)\frac{\partial v}{\partial y} + (a_3x + b_3y + c_3z + \dots)\frac{\partial v}{\partial z} = kv, \tag{25}$$

et on la vérifiera en posant

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z + \dots; \tag{26}$$

pourvu que $\lambda, \mu, \nu, \dots$ désignent des facteurs constants propres à remplir les conditions

$$a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \dots = k\lambda, \quad b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu + \dots = k\mu, \quad c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu + \dots = k\nu, \dots \tag{27}$$

ou

$$\begin{cases} (a_1 - k)\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \dots = 0, \\ b_1\lambda + (b_2 - k)\mu + b_3\nu + \dots = 0, \\ c_1\lambda + c_2\mu + (c_3 - k)\nu + \dots = 0, \\ \text{etc.} \dots \end{cases} \tag{28}$$

Ces équations ne seront pas toutes incompatibles, si l'on détermine convenablement la constante k. Or, pour cela, il suffira d'éliminer $\lambda, \mu, \nu, \dots$ entre les équations (28). Le résultat de l'élimination sera

$$(a_1 - k)(b_2 - k)(c_3 - k)\dots - a_2b_1(c_3 - k)\dots + \dots = 0, \tag{29}$$

et renfermera la seule inconnue k, et son degré sera égal au nombre des variables $x, y, z, \dots$. Les diverses racines

de l'équation (59) fourniront le système des intégrales générales des équations (54), et ces intégrales générales se trouveront toutes comprises dans la formule (50), ou

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \cdots = (\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \cdots)\, a^{K(t-\tau)}. \tag{63}$$

Si aux équations (54) on substitue les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \partial x &= [\,a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + \varphi_1(t)\,]\,\partial t, \\ \partial y &= [\,a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots + \varphi_2(t)\,]\,\partial t, \\ \partial z &= [\,a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots + \varphi_3(t)\,]\,\partial t, \\ &\text{etc...} \end{aligned}\right. \tag{61}$$

$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, ... étant des fonctions quelconques de la variable t; alors, en supposant toujours la fonction u déterminée par la formule (56), choisissez les quantités

$$\lambda, \mu, \nu, \cdots K$$

de manière à vérifier les conditions (58), (59), et faisant, pour abréger

$$\lambda \varphi_1(t) + \mu \varphi_2(t) + \nu \varphi_3(t) + \cdots = \varphi(t), \tag{62}$$

on tirera des formules (56), (57)

$$\square u = K u + \varphi(t),$$

par conséquent

$$\nabla u = -\int_\tau^t \square u \cdot \partial t = K(t-\tau)\,u - \int_\tau^t \varphi(t)\,\partial t,$$

$$\nabla^2 u = -\int_\tau^t K(t-\tau)\,\square u \cdot \partial t = \frac{K^2(t-\tau)^2}{1\cdot 2}\,u - \int_\tau^t K(t-\tau)\,\varphi(t)\,\partial t,$$

$$\nabla^3 u = -\int_\tau^t \frac{K^2(t-\tau)^2}{1\cdot 2}\,\square u \cdot \partial t = \frac{K^3(t-\tau)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,u - \int_\tau^t \frac{K^2(t-\tau)^2}{1\cdot 2}\,\varphi(t)\,\partial t,$$

etc...

Donc l'équation (55) donnera

$$v = u\left\{1 + K(t-\tau) + \frac{K^2(t-\tau)^2}{1\cdot 2} + \cdots\right\} - \int_\tau^t \left\{1 + K(t-\tau) + \frac{K^2(t-\tau)^2}{1\cdot 2} + \cdots\right\} \varphi(t)\,\partial t, \tag{63}$$

ou, ce qui revient au même,

$$v = ue^{\kappa(t-b)} - \int_t^t e^{\kappa(t-t)} f(t)\,dt. \tag{64}$$

La formule (64) peut encore s'écrire comme il suit

$$ue^{-\kappa t} - ve^{-\kappa t} = \int_t^t e^{-\kappa t} f(t)\,dt, \tag{65}$$

et donne, quand on y transporte les valeurs de u et de $f(t)$ tirées des équations (59) et (62)

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \dots = (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \dots)\,e^{\kappa(t-t)} + e^{\kappa t}\int_t^t e^{-\kappa t}\,[\lambda X_1(t) + \mu Y_1(t) + \nu Z_1(t) + \dots]\,dt. \tag{66}$$

Les diverses équations que comprend la formule (66), en égard aux diverses valeurs qu'on peut attribuer à la constante κ, présentent le système des intégrales générales des équations (61). Si, après avoir substitué, dans la même formule, les valeurs des quantités $\lambda, \mu, \nu, \dots$ ou plutôt de leurs rapports exprimés en fonctions de κ, on suppose que deux, trois, ... racines de l'équation (59) deviennent égales entre elles; les deux, trois, ... équations correspondantes à ces racines coïncideront, et devront être remplacées, comme il est facile de le prouver, par l'une d'entre elles jointe à l'équation dérivée du premier ordre, ou une deux équations dérivées du premier et du second ordre, ... qu'on obtiendra, en différentiant une ou plusieurs fois de suite les deux membres de l'équation conservée par rapport à la seule quantité κ.

Pour montrer une dernière application de la formule (33), supposons les équations (2) réduites à une seule qui soit du premier degré par rapport à x, ou de la forme

(67) $$\partial u = z\,[\,\mathcal{F}(t) + x\,\mathcal{F}'(t)\,]\,\partial t,$$

$\mathcal{F}(t)$, $\mathcal{F}'(t)$ étant deux fonctions quelconques de t. Alors la formule (27) donnera

$$\nabla u = -\int_\tau^\theta [\,\mathcal{F}(t) + x\,\mathcal{F}'(t)\,]\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\partial t,$$

et par suite on tirera de la formule (33), en y posant $u = x$

(68) $$\left\{ \begin{aligned} \xi = x\Big\{ 1 - \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t + \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t.\partial t - \text{etc...}\Big\} \\ - \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\Big\{ 1 - \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t + \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t.\partial t - \text{etc...}\Big\}\partial t. \end{aligned} \right.$$

D'autre part $\mathcal{F}(t)$ étant la dérivée de $\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t$, on aura

$$\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t.\partial t = \frac{1}{2}\Big(\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t\Big)^2,$$

$$\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t.\partial t.\partial t = \frac{1}{2.3}\Big(\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t\Big)^3,$$

etc ....

et par suite

$$1 - \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t + \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t.\partial t - \text{etc..} = 1 - \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t + \frac{1}{2}\Big(\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t\Big)^2 - \text{etc}$$

$$= e^{-\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t}$$

Donc la formule (68), qui représente l'intégrale générale de l'équation (67), pourra être réduite à

(69) $$\xi = x\,e^{-\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t} - \int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,e^{-\int_\tau^\theta \mathcal{F}(t)\,\partial t}\,\partial t.$$

Dans les divers exemples que nous venons de parcourir, la formule (33) fournit, pour les équations différentielles proposées les mêmes intégrales qui étaient

déjà connues, et auxquelles on avait été conduit par diverses méthodes que nous nous dispenserons de rappeler.

Il est facile de prouver que la formule (69) ou (71) continuera de représenter une intégrale générale des équations (2), si, u devenant une fonction explicite de toutes les variables $x, y, z, \dots t$, on détermine $\Box u$ non plus à l'aide de l'équation (50), mais à l'aide de la suivante

$$\Box u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta x}{f} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{f} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{f} \frac{\partial u}{\partial z} + \dots, \tag{70}$$

pourvu toutefois que la série (42) reste convergente, et que l'on désigne par v la valeur de u correspondante aux valeurs

$$\xi, \eta, \zeta, \dots \tau$$

des variables

$$x, y, z, \dots t.$$

Effectivement, si, dans cette dernière hypothèse, on pose

$$V = u + \frac{\tau - t}{1} \Box u + \frac{(\tau - t)^2}{1 \cdot 2} \Box^2 u + \dots, \tag{71}$$

comme on aura généralement

$$\Box \left\{ \frac{(\tau - t)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \Box^n u \right\} = \frac{(\tau - t)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \Box^{n+1} u - \frac{(\tau - t)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \Box^n u,$$

on en conclura

$$\Box V = 0, \tag{72}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\theta x}{f} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{y}{f} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{z}{f} \frac{\partial V}{\partial z} + \dots = 0. \tag{73}$$

Donc, dans l'hypothèse admise,

$$s = V$$

sera une intégrale particulière de l'équation (18), et la

formule (9), qui coïncidera, au vertu de l'équation (7), avec la formule (29) ou (31), vers [voyez le 1er Théorème] une intégrale générale des équations (2). Pour cela, on peut, dans la même hypothèse, déduire directement des équations (2) la formule (29) ou (31) à l'aide de la formule de Taylor. Effectivement, u étant une fonction quelconque de la variable indépendante t, et des variables x, y, z, ... liées à t par les équations (2), on aura, en vertu de ces équations jointes à la formule (10)

$$\delta u = \Box u \cdot \delta t.$$ On trouvera de même

$$\delta \Box u = \Box^2 u \cdot \delta t,$$

$$\delta \Box^2 u = \Box^3 u \cdot \delta t,$$

etc. ....

et l'on aura par suite

(14) $\delta u = \Box u \cdot \delta t$, $\delta^2 u = \Box^2 u \cdot \delta t^2$, $\delta^3 u = \Box^3 u \cdot \delta t^3$ etc. ....

Ajoutons, si l'on nomme v une nouvelle valeur de u correspondante à une nouvelle valeur τ de la variable indépendante t, la formule de Taylor donnera, pour des valeurs de τ - t qui permettront de développer v en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette différence

(15) $$v = u + \frac{\tau - t}{1}\delta u + \frac{(\tau - t)^2}{1 \cdot 2}\delta^2 u + \frac{(\tau - t)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\delta^3 u + \text{etc.} ....$$

Or, en substituant dans l'équation (15) les valeurs de δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, etc. ....

fournies par la formule (14), on verra se réduire simplement la formule (29).

Pour vérifier sur un exemple très simple la formule (29). Dans le cas où l'on y suppose $\Box u$ déterminé par la formule (70), concevons que les équations (72) se réduisent à

$$\partial x = \frac{x}{t}\partial t, \quad \partial y = \frac{y}{t}\partial t, \quad \partial z = \frac{z}{t}\partial t, \quad \ldots \tag{76}$$

On aura

$$\Box u = \frac{1}{t}\left(t\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right), \tag{77}$$

et par conséquent

$$\Box u = \frac{u}{t} \tag{78}$$

lorsque u deviendra une fonction homogène du premier degré en $x, y, z, \ldots t$. Alors alors, $\Box u$ étant une fonction homogène d'un degré nul, on tirera de l'équation (77), en y remplaçant u par $\Box u$,

$$\Box^2 u = 0; \tag{79}$$

donc, par suite

$$\Box^3 u = 0, \quad \Box^4 u = 0, \quad \text{etc.}\ldots.$$

Cela posé, la formule (29) donnera simplement

$$v = u + \frac{r-t}{1}\frac{u}{t} = \frac{r}{t}u,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{u}{v} = \frac{t}{r}. \tag{80}$$

Si, dans cette dernière formule, on réduit successivement la fonction u aux variables $x, y, z, \ldots$ il faudra en même temps attribuer à la constante arbitraire v l'une des valeurs $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; et l'on obtiendra ainsi les intégrales des équations (76) sous la forme

$$\frac{x}{\xi} = \frac{t}{r}, \quad \frac{y}{\eta} = \frac{t}{r}, \quad \frac{z}{\zeta} = \frac{t}{r}, \quad \ldots\ldots \tag{81}$$

On arriverait directement à ces dernières, en intégrant les deux membres de chacune des équations (76) présentées sous la forme

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t}, \quad \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial t}{t}, \quad \frac{\partial z}{z} = \frac{\partial t}{t}, \ldots$$

On pourrait généraliser encore la formule (79), en y remplaçant la variable indépendante t, et la quantité z, par une fonction donnée r des variables $x, y, z, \ldots t$, et par les valeurs particulières φ des correspondantes à $t=z$. Effectivement, r et u étant deux fonctions quelconques de $x, y, z, \ldots t$, les équations différentielles (2), qui actuellement comprises dans la formule (1), obligent

$$x, y, z, \ldots t$$

par conséquent aussi les fonctions

$$r \text{ et } u$$

à varier simultanément; et, si l'on nomme

$$\varphi \text{ et } v$$

deux valeurs correspondantes de ces fonctions, v sera ce que devient la fonction u quand la variable r reçoit l'accroissement $\rho - r$. On, en admettant que v soit développable par la formule de Taylor en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cet accroissement, on aura

$$(82) \qquad v = u + \frac{\rho - r}{1}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(\rho - r)^2}{1.2}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \text{etc.} \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r}, \ldots$$

représentant les rapports entre les différentielles totales des

fonctions u, $\frac{\partial u}{\partial r}$, etc. ...

et la différentielle totale de r. D'autre part, en se servant des notations

$$\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial r}{\partial y},\ \dots\ \frac{\partial r}{\partial t};\quad \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \dots\ \frac{\partial u}{\partial t};$$

pour désigner les dérivées partielles de r et de u considérées comme fonctions de

$$x,\ y,\ z,\ \dots\ t,$$

on aura évidemment

$$(60)\qquad dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \dots + \frac{\partial r}{\partial t}dt,\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

et l'on tirera de la formule (1)

$$\frac{dx}{\partial\theta} = \frac{dy}{\mathcal{Y}} = \frac{dz}{\mathcal{Z}} = \dots = \frac{dt}{\mathcal{T}} = \frac{dr}{\partial\theta\frac{\partial r}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial r}{\partial z} + \dots + \mathcal{T}\frac{\partial r}{\partial t}}$$

$$= \frac{du}{\partial\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial u}{\partial z} + \dots + \mathcal{T}\frac{\partial u}{\partial t}},$$

par conséquent

$$(61)\qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial u}{\partial z} + \dots + \mathcal{T}\frac{\partial u}{\partial t}}{\partial\theta\frac{\partial r}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial r}{\partial z} + \dots + \mathcal{T}\frac{\partial r}{\partial t}}.$$

Donc, si l'on fait pour abréger

$$(62)\qquad \Box u = \frac{\partial\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial u}{\partial z} + \dots + \mathcal{T}\frac{\partial u}{\partial t}}{\partial\theta\frac{\partial r}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial r}{\partial z} + \dots + \mathcal{T}\frac{\partial r}{\partial t}},$$

on aura simplement

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \Pi u.$$

On en conclura

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} = \frac{\partial\,\Pi u}{\partial r} = \Pi^2 u,\quad \text{etc.}\dots$$

et par suite l'équation (52) donnera

(86) $$v = u + \frac{\rho - r}{1} \Box u + \frac{(\rho - r)^2}{1 \cdot 2} \Box^2 u + \text{etc...},$$

ou, si l'on emploie la forme symbolique

(87) $$v = e^{(\rho - r)\Box} u .$$

J'ajoute que l'équation (86) représentera une intégrale générale des équations différentielles proposées, tant que la série

(88) $$u, \quad \frac{\rho - r}{1} \Box u, \quad \frac{(\rho - r)^2}{1 \cdot 2} \Box^2 u, \quad \text{etc...}$$

sera convergente. Effectivement, si dans cette hypothèse on fait pour abréger

(89) $$U = u + \frac{\rho - r}{1} \Box u + \frac{(\rho - r)^2}{1 \cdot 2} \Box^2 u + \text{etc...},$$

comme on aura, en vertu de l'équation (89)

$$\Box r = 1,$$

et par suite

$$\Box \left\{ \frac{(\rho - r)^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \Box^n u \right\} = \frac{(\rho - r)^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \Box^{n+1} u - \frac{(\rho - r)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \Box^n u,$$

on trouvera

(90) $$\Box U = 0,$$

par conséquent

(91) $$\mathfrak{M} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{Y} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathfrak{Z} \frac{\partial U}{\partial z} + \cdots + \mathfrak{P} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 .$$

Donc

$$V = U$$

sera une intégrale particulière de l'équation (16), et la formule (19) qui coïncidera, en vertu de l'équation (89) avec la formule (86), sera [en vertu du 1er théorème] une intégrale générale de cette équation (2). Reste donc à énoncer la proposition suivante.

5e Théorème. Si la série (88) est convergente,

l'équation (85) est propre à représenter une intégrale générale des équations (2).

A la formule (85), analogue à la formule (33) du § 2, on arrive par des raisonnements analogues à ceux par lesquels nous avons établi que l'intégrale générale des équations (2), déjà mentionnée à plusieurs reprises, devait contenir des fonctions arbitraires de

$$x, y, z, \ldots t$$

$$t, y, z, \ldots z.$$

Quelquefois l'échange dont il s'agit représente précisément la même formule. C'est ce qui arrivera notamment relativement aux équations (28), (30), (30'), (80), (81).

Il ne serait pas inutile d'indiquer ici une forme assez remarquable sous laquelle on peut mettre l'équation (33). Si, en désignant par $\Box u$ une fonction des seules variables $x, y, z, \ldots$ et l'expression $\Box u$ définie par la formule (35), on écrit

$$\Box' u, \quad \Box'' u, \quad \Box''' u, \ldots$$

ce que devient $\Box u$, lorsque dans la quantité

$$X, Y, Z, \ldots f$$

c'est-à-dire comme fonction de

$$x, y, z, \ldots t$$

on remplace la seule variable t par les nouvelles variables

$$t', t'', t''', \ldots$$

on aura successivement, suivant les formules (36) et (37),

$$\nabla u = -\int_\tau^t \Box u \, \partial t = -\int_\tau^{t'=t} \Box' u \, \partial t' = -\int_\tau^{t''=t'=t} \Box'' u \, \partial t'' = \text{etc.},$$

$$\nabla^2 u = \int_\tau^t \Box \int_\tau^{t'} \Box' u \, \partial t' \, \partial t' = \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \Box' \Box'' u \, \partial t'' \partial t',$$

$$\nabla^2 u = -\int_t^t \Box' \int_t^{t'} \Box'' \int_t^{t''} \Box''' u \cdot \partial t''' \partial t'' \partial t' = -\int_t^t \int_t^{t'} \int_t^{t''} \Box' \Box'' \Box''' u \cdot \partial t''' \partial t'' \partial t'$$

etc...,

et par suite (formule (99)) deviendra

$$(g\ell) \quad v = u - \int_t^t \Box' u \, \partial t' + \int_t^t \int_t^{t'} \Box' \Box'' u \, \partial t'' \partial t' - \int_t^t \int_t^{t'} \int_t^{t''} \Box' \Box'' \Box''' u \, \partial t''' \partial t'' \partial t' + \text{etc}$$

Lorsque les fonctions $\mathcal{Q}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ ... $\mathcal{U}^2$ ne renferment pas explicitement la variable t, on a

$$\Box u = \Box' u = \Box'' u = \Box''' u = \text{etc...},$$

par conséquent

$$\Box' u = \Box u, \quad \Box' \Box'' u = \Box^2 u, \quad \Box' \Box'' \Box''' u = \Box^3 u, \text{ etc...}$$

et de plus

$$(g\mathcal{Q}) \quad -\int_t^t \partial t = \frac{t-t}{1}, \quad \int_t^t \int_t^{t'} \partial t'' \partial t' = \frac{(t-t)^2}{1.2}, \quad -\int_t^t \int_t^{t'} \int_t^{t''} \partial t''' \partial t'' \partial t' = \frac{(t-t)^3}{1.2.3}, \text{ etc...}$$

Donc alors la formule (g2) deviendra réduite, comme on devait s'y attendre à la formule (99).

La formule (g2) fournit le moyen d'exprimer sous forme très simple les intégrales générales des équations différentielles qui représentent les mouvements simultanés du fluide élastique et de l'air environnant.

Il est bon d'observer que dans le cas où l'on considère seulement deux variables x et t et où l'équation (116) devient

$$(g\mathcal{U}) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\mathcal{Q}\mathcal{L}}{\mathcal{U}^2} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

la différentielle complète de la fonction V, savoir

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial t} \partial t + \frac{\partial V}{\partial x} \partial x$$

se réduit, quand on y substitue pour $\frac{\partial V}{\partial t}$ la valeur tirée

de la formule (94), à un produit de la forme

$$V\left(\delta x - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\delta\tau\right), \tag{95}$$

la valeur de V étant

$$V = \frac{\partial \tau}{\partial x}. \tag{96}$$

Donc la fonction τ étant déterminée par l'une des formules (92) ou (89), le facteur $V = \frac{\partial \tau}{\partial x}$ sera propre à rendre intégrable le premier membre d'une équation différentielle entre x et t, présentée sous la forme

$$\delta x - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\delta t = 0. \tag{97}$$

Effectivement l'équation (94), différentiée par rapport à x donne

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}V\right), \tag{98}$$

et la formule (98) exprime la condition d'intégrabilité du produit (95). Cette formule peut d'ailleurs être considérée comme une équation aux différences partielles propre à déterminer le facteur V en fonction des variables x et t.

Si, à la place des équations (91) qui sont du premier ordre, l'on considérait une ou plusieurs équations différentielles d'ordres supérieurs, pour résoudre celle-ci il n'y aurait plus une des équations différentielles du premier ordre; il suffirait de leur adjoindre quelques unes des formules

(99) $\frac{dx}{dt} = x', \frac{dx'}{dt} = x'', \dots \frac{dy}{dt} = y', \frac{dy'}{dt} = y'' \dots \frac{dz}{dt} = z', \frac{dz'}{dt} = z'', \dots$ etc

c'est à dire par nouvelles équations différentielles, qui seraient alors menant du premier ordre dans le cas où l'on prendrait pour inconnues non seulement $x, y, z, \dots$ mais encore quelques unes des fonctions dérivées

$$x', x'' \dots y', y'', \dots z', z'', \dots \text{etc.}$$

A l'aide de cet artifice on obtient sans peine de la formule (66) l'intégrale générale sous forme finie d'une équation linéaire de l'ordre n à coefficients constants avec un second membre variable, c'est à dire d'une équation de la forme

$$(100) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + a \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + b \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + g \frac{dx}{dt} + hx = f(t).$$

---

§ 2

Il nous reste à faire voir comment on peut s'assurer généralement que les Séries (81), (82), (88) des paragraphes précédents sont convergentes, lorsque pour des valeurs de la différence $t - T$ ou $t - t_0$ suffisamment rapprochées de zéro; et comment on peut alors fixer des limites supérieures aux erreurs que l'on commet en considérant seulement dans chaque Série les n premiers termes. Le nouveau Calcul que j'ai désigné sous le nom de Calcul des limites fait l'objet d'un Mémoire sur la Mécanique céleste lithographié à Turin, et traduit en langue Italienne par les soins de l'éditeur des Opuscoli

Mathematici e Fisici qui va publicar a Milano, fornirà diversi metodi a l'aida dei quali ognuno potrà attendere ca doppia lita. Ce me limiterai pour le moment à indiquer l'une de ces méthodes, me proposant de revenir sur cet objet dans un autre mémoire.

Soient r une quantité positive, p un arc réel, π le rapport de la circonférence au diamètre, et $f(x)$ une fonction quelconque de la variable réelle ou imaginaire x. Dans l'expression imaginaire

$$re^{p\sqrt{-1}} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p),$$

r, ou la racine carrée de la somme qu'on obtient en ajoutant les carrés de la partie réelle et du coefficient de $\sqrt{-1}$, sera ce qu'on nomme le module; et l'on aura évidemment

$$\frac{\partial f(x+re^{p\sqrt{-1}})}{\partial r} = \frac{1}{r\sqrt{-1}} \frac{\partial f(x+re^{p\sqrt{-1}})}{\partial p}. \tag{1}$$

Or, si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente 1° par rapport à r, et à partir de $r=0$, 2° par rapport à p entre les limites $p=-\pi$, $p=\pi$; et, si l'on suppose que la fonction de x, r et p représentée par

$$f(x+re^{p\sqrt{-1}}) \tag{2}$$

reste finie et continue, quel que soit p, pour les valeurs attribuées à r et pour une valeur plus petite on trouvera

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{r} \frac{\partial f(x+re^{p\sqrt{-1}})}{\partial r}\, dr\, dp = 0.$$

ou ce qui revient au même

$$\int_{-\pi}^{\pi} v^{\nu}\, f(x + r a^{p\sqrt{-1}})\, \partial p = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \partial p = 2\pi f(x),$$

puis on en conclura

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + r a^{p\sqrt{-1}})\, \partial p. \qquad (3)$$

Si l'on différentie la formule (3), n fois de suite, par rapport à x, on aura

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(x + r a^{p\sqrt{-1}})\, \partial p;$$

puis en intégrant par parties le second membre de cette dernière n fois de suite, on aura

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^{-n} a^{-np\sqrt{-1}} f(x + r a^{p\sqrt{-1}})\, \partial p. \qquad (4)$$

Concevons maintenant qu'ayant posé

$$r a^{p\sqrt{-1}} = \overline{x} \qquad (5)$$

on adopte les notations du calcul des limites, et que l'on désigne en conséquence par

$$\Lambda f(x + \overline{x}) \qquad (6)$$

le plus grand des valeurs que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire $f(x + \overline{x})$ lorsque dans

$$\overline{x} = r a^{p\sqrt{-1}}$$

on fait varier l'angle p sans changer le module r. Dans l'intégrale qui renferme le second membre de l'équation (4), la fonction sous le signe $\int$ offrira toujours un module inférieur ou tout au plus égal au produit

$$r^{-n} \Lambda f(x + \overline{x}),$$

et, en multipliant ce produit par

$$\int_{-\pi}^{\pi} \partial p = 2\pi,$$

on en obtiendra un autre qui sera supérieur au module ou à la valeur numérique de l'intégrale elle-même. Par suite, si l'on indique le module ou la valeur numérique d'une expression imaginaire ou réelle à l'aide de l'abbréviation

mod.

placée devant l'expression dont il s'agit, on tirera de la formule (4)

$$(7) \qquad \text{mod. } f^{(n)}(x) < 1.2.3\ldots n\, r^{-n} \Lambda f(x+\overline{x}).$$

D'ailleurs, comme on aura généralement

$$1.2.3\ldots n\, r^{-n} = (-1)^n r \frac{\partial^n (r^{-1})}{\partial r^n},$$

l'équation (7) pourra encore s'écrire comme il suit

$$(8) \qquad \text{mod. } f^{(n)}(x) < (-1)^n \frac{\partial^n (r^{-1})}{\partial r^n} r \Lambda f(x+\overline{x}),$$

et, sous cette forme, elle subsistera même pour $n=0$, de sorte qu'on aura encore

$$(9) \qquad \text{mod. } f(x) < \Lambda f(x+\overline{x}),$$

comme on peut le conclure directement de l'équation (3). Il est bon de rappeler que, dans les seconds membres des formules (8) et (9), la valeur de r devra toujours être telle que la fonction

$$f(x+\overline{x}) = f(x+ra^{\nu\sqrt{-1}})$$

reste finie et continue, quel que soit p, pour cette même valeur de r et pour une valeur plus petite.

Cela posé, considérons d'abord l'une des séries qui représentent l'intégrale d'une seule équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{X}(x,t). \tag{10}$$

Si

$$u = f(x,t) \tag{11}$$

étant une fonction de x seule, supposé au reste autant de la fonction $\mathcal{X}$, on sait que l'on a

$$\mathcal{X} = \mathcal{F}(x), \tag{12}$$

l'intégrale de l'équation (10) sera fournie par la formule (39) du § 2, c'est-à-dire, par l'équation

$$f(\xi) = f(x) + (t-\tau)\,\Box f(x) + \frac{(t-\tau)^2}{1.2}\Box^2 f(x) + \frac{(t-\tau)^3}{1.2.3}\Box^3 f(x) + \text{etc.}, \tag{13}$$

dans laquelle on aura

$$\Box f(x) = \mathcal{F}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{cases} \Box f(x) = \mathcal{F}(x) f'(x), \text{ et par suite} \\ \Box^2 f(x) = (\mathcal{F}(x))^2 f''(x) + \mathcal{F}(x)\mathcal{F}'(x) f'(x), \\ \Box^3 f(x) = (\mathcal{F}(x))^3 f'''(x) + 3(\mathcal{F}(x))^2 \mathcal{F}'(x) f''(x) + \{(\mathcal{F}(x))^2 \mathcal{F}''(x) + \mathcal{F}(x)(\mathcal{F}'(x))^2\} f'(x), \\ \text{etc...} \end{cases} \tag{15}$$

Or de ces dernières équations, combinées avec les formules (8) et (9), on tirera successivement

$$\begin{cases} \text{mod. } \Box f(x) < \mathcal{R}_1 . r\Lambda \mathcal{F}(x+\bar{x}) . r\Lambda f(x+\bar{x}), \\ \text{mod. } \Box^2 f(x) < \mathcal{R}_2 (r\Lambda \mathcal{F}(x+\bar{x}))^2 . r\Lambda f(x+\bar{x}), \\ \text{mod. } \Box^3 f(x) < \mathcal{R}_3 (r\Lambda \mathcal{F}(x+\bar{x}))^3 . r\Lambda f(x+\bar{x}), \\ \text{etc...} \end{cases} \tag{16}$$

$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \ldots$ étant des fonctions de r déterminées par

les équations

$$(17)\quad \begin{cases} -R_1 = r^{-1}\dfrac{\partial(r^{-1})}{\partial r}, \\ R_2 = (r^{-1})^2\dfrac{\partial^2(r^{-1})}{\partial r^2} + r^{-1}\dfrac{\partial(r^{-1})}{\partial r}\dfrac{\partial(r^{-1})}{\partial r}, \\ -R_3 = (r^{-1})^3\dfrac{\partial^3(r^{-1})}{\partial r^3} + 3(r^{-1})^2\dfrac{\partial(r^{-1})}{\partial r}\dfrac{\partial^2(r^{-1})}{\partial r^2} \\ \quad + \left\{(r^{-1})^2\dfrac{\partial^3(r^{-1})}{\partial r^2} + r^{-1}\left(\dfrac{\partial(r^{-1})}{\partial r}\right)^2\right\}\dfrac{\partial(r^{-1})}{\partial r}, \\ \text{etc...} \end{cases}$$

et la valeur de r devant être telle que chacune des fonctions

$$(18)\qquad f(x+\overline{\omega}), \quad f(x+\overline{\omega}\iota)$$

demeure finie et continue, quel que soit ω, pour cette même valeur de r et pour une valeur plus petite. D'ailleurs les valeurs de

$$-R_1, \quad R_2, \quad -R_3, \ldots$$

fournies par les équations (17) sont ce que deviennent les valeurs de $\Box f(x)$, $\Box^2 f(x)$, $\Box^3 f(x)$, ... fournies par les équations (15), quand, après y avoir posé

$$(19)\qquad F(x) = f(x) = x^{-1},$$

on y remplace la variable x par le module r; et il ne pourrait en être autrement, puisque, dans le second membre de la formule (8), le coefficient du produit

$$r^n f^{(n)}(x+\overline{\omega}\iota)$$

est, abstraction faite du signe, ce que devient $f^{(n)}(x)$, quand après avoir posé

$$f(x) = x^{-1}$$

on substitue r à x. Donc les formules (16) donneront généralement

$$\text{(20)} \qquad \text{mod. } \Box^n f(x) < R_n (r \Lambda \mathfrak{f}(x+\overline{n}))^n . r \Lambda f(x+\overline{n}),$$

$(-1)^n R_n$ étant ce que devient la valeur de

$$\Box^n f(x),$$

correspondante aux valeurs de $\mathfrak{f}(x)$, $f(x)$ données par la formule (19), quand on remplace x par r. Or outre de l'équation (18) jointe à la formule (19)

$$\Box f(x) = x^{-1} \frac{\partial (x^{-1})}{\partial x} = -x^{-2},$$

$$\Box^2 f(x) = x^{-1} \frac{\partial (-x^{-2})}{\partial x} = 2 x^{-3},$$

$$\Box^3 f(x) = x^{-1} \frac{\partial (2x^{-3})}{\partial x} = -2.3 x^{-4},$$

etc....

et en général

$$\Box^n f(x) = (-1)^n 1.2.3 \ldots (2n-1) x^{-(2n+1)}.$$

On aura donc

$$\text{(21)} \qquad R_n = 1.2.3 \ldots (2n-1) r^{-(2n+1)}$$

et la formule (20) donnera

$$\text{(22)} \qquad \text{mod. } \Box^n f(x) < 1.2.3 \ldots (2n-1) r^{-n} (\Lambda \mathfrak{f}(x+\overline{n}))^n . \Lambda f(x+\overline{n}).$$

Enfin, comme on a évidemment

$$\Lambda \frac{\mathfrak{f}(x+\overline{n})}{\overline{n}} = \frac{\Lambda \mathfrak{f}(x+\overline{n})}{r},$$

la formule (22) pourra encore s'écrire comme il suit

$$\text{(23)} \qquad \text{mod. } \Box^n f(x) < 1.2.3 \ldots (2n-1) \left(\Lambda \frac{\mathfrak{f}(x+\overline{n})}{\overline{n}} \right)^n . \Lambda f(x+\overline{n}).$$

Cela posé, le terme général de la série comprise dans le second membre de la formule (13) sera

(26) $$\frac{(\bar{r}-t)^n}{1.2.3\ldots n}\,\Box^n f(x)$$

offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

(29) $$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}\left\{(\bar{r}-t)\Lambda\frac{\mathcal{F}(x+\bar{x})}{\bar{x}}\right\}^n\Lambda f(x+\bar{x}),$$

par conséquent à celle du produit

(26) $$\left\{2(\bar{r}-t)\Lambda\frac{\mathcal{F}(x+\bar{x})}{\bar{x}}\right\}^n\Lambda f(x+\bar{x}),$$

attendu que l'on a certainement

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}<\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}=2^n.$$

Donc les différents termes de la série ou quotient offriront des valeurs numériques inférieures à celles des termes correspondants de la progression géométrique qui aurait pour terme général l'expression (26). Or cette progression sera convergente, si l'on a

(27) $$\text{mod.}\left\{2(\bar{r}-t)\Lambda\frac{\mathcal{F}(x+\bar{x})}{\bar{x}}\right\}<1,$$

ou, ce qui revient au même

(28) $$\text{mod.}(\bar{r}-t)<\frac{1}{2}\,\frac{1}{\Lambda\,\dfrac{\mathcal{F}(x+\bar{x})}{\bar{x}}};$$

et alors, si l'on remplace la somme de la série par la somme de ses n premiers termes, l'erreur de la série, ou l'erreur connue, sera inférieure (abstraction faite du signe) à la somme des valeurs numériques que prennent dans la progression géométrique le terme (26) et les suivants, c'est-à-dire inférieure au produit

(29) $$\frac{\left\{\text{mod.}\left[2(\bar{r}-t)\Lambda\frac{\mathcal{F}(x+\bar{x})}{\bar{x}}\right]\right\}^n}{1-\text{mod.}\left[2(\bar{r}-t)\Lambda\frac{\mathcal{F}(x+\bar{x})}{\bar{x}}\right]}\Lambda f(x+\bar{x})$$

Supposons en particulier

$$f(x) = x ;$$

alors l'équation (17) donnera

$$\xi = x + (\tau - t)\,\Box x + \frac{(\tau-t)^2}{1\cdot 2}\,\Box^2 x + \frac{(\tau-t)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\Box^3 x + \text{etc.} \qquad (20)$$

et le reste de la série compris dans le second membre de la formule (20) sera inférieur, abstraction faite du signe, à

$$\frac{\left\{ \text{mod.}\left[2(\tau-t)\Lambda \frac{\partial^0(x+\overline{x})}{\overline{x}} \right] \right\}^n}{1 - \text{mod}\left[2(\tau-t)\Lambda \frac{\partial^1(x+\overline{x})}{\overline{x}} \right]} \Lambda(x+\overline{x}). \qquad (21)$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

1er Théorème. Supposons que la variable t et la fonction x de cette variable étant liées entre elles par l'équation différentielle

$$dx = F(x)\,dt, \qquad (22)$$

l'on nomme ξ une nouvelle valeur de la fonction x correspondante à une nouvelle valeur τ de la variable t. ξ sera développable par la formule (20) en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $\tau - t$, si la formule (28) est vérifiée, c'est à dire, si les valeurs numériques de $\tau - t$ est inférieures à celle que détermine l'équation

$$\tau - t = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Lambda\left[\frac{\partial^1(x+\overline{x})}{\overline{x}}\right]}, \qquad (23)$$

la valeur du module r de

$$\overline{x} = re^{p\sqrt{-1}}$$

étant arbitraire à la seule condition que la fonction

$f(x+\overline{z})$

reste finie et continue, quel que soit l'angle p, pour cette valeur et pour une valeur plus petite. Alors le reste de la série réduite à ses n premiers termes sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (31). Alors aussi une fonction quelconque de ξ désignée par $f(\xi)$ sera elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $z-z$, et le reste de cette dernière série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (29), si la valeur du module r est astreinte à la double condition que les deux fonctions $f(x+\overline{z})$, $f(x+\overline{z})$ demeurent finies et continues, quel que soit l'angle p, pour cette valeur de r et pour une valeur plus petite.

Il est avantageux de choisir le module r de $\overline{z}$ de telle sorte que la limite assignée par la formule (28) à la valeur numérique de $z-z$, et représentée par le second membre de cette formule ou de l'équation (33), devienne le plus grand possible. On y parviendra, en réduisant la quantité

$$\Lambda \frac{f(x+\overline{z})}{\overline{z}}$$

à la plus petite valeur qu'elle puisse acquérir, c'est-à-dire, à ce que nous avons nommé, dans un autre Mémoire, le module principal de l'expression

$$\frac{f(x+\overline{z})}{\overline{z}}$$

considérée comme fonction de x.

Pour montrer, dans un exemple très simple, une application des formules qui précèdent, concevons que l'équation (32) se réduise à

$$dx = x^i\,dt \tag{34}$$

i désignant une constante positive. On aura, dans ce cas,

$$f(x) = x^i,$$

et, si l'on suppose x positive, afin que $f(x)$ soit réelle, la fonction

$$f(x+\bar{x}) = (x+\nu\alpha^{\nu\omega-1})^i$$

ne restera continue, pour des valeurs fractionnaires ou irrationnelles de l'exposant i, qu'autant que l'on aura

$$\nu < x. \tag{35}$$

Alors on trouvera

$$\Lambda(x+\bar{x}) = x+\nu, \quad \Lambda(x+\bar{x})^i = (x+\nu)^i,$$

et par suite

$$\Lambda\frac{(x+\bar{x})^i}{\bar{x}} = \frac{(x+\nu)^i}{\nu}. \tag{36}$$

La plus petite valeur que puisse acquérir cette dernière quantité, eu égard à la condition (35), sera 1° si l'on suppose $i<2$, la valeur qui correspond à $\nu = x$, savoir,

$$2^i x^{i-1}, \tag{37}$$

2° si l'on suppose $i>2$, la valeur qui correspond à la formule

$$\frac{\partial\left\{\frac{(x+\nu)^i}{\nu}\right\}}{\partial\nu} = 0, \quad \text{ou} \quad \nu = \frac{x}{i-1}$$

savoir,

(37) $$\frac{i^i}{(i-1)^{i-1}}\,x^{i-1}$$

Donc, en vertu du théorème 1er, ξ et τ désignant des valeurs qui acquièrent simultanément les variables x et t assujetties à vérifier l'équation (34), ξ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $\tau - t$, tant que la valeur numérique de $\tau - t$ restera inférieure à la moitié du rapport

(39) $$\frac{1}{2^i\, x^{i-1}}$$

si l'on a $i < 2$, et à la moitié du rapport

(40) $$\frac{(i-1)^{i-1}}{i^i\, x^{i-1}}$$

si l'on a $i > 2$. On en effet on tire de l'équation (34) divisée par x^i et intégrée directement

(41) $$\frac{\xi^{1-i} - x^{1-i}}{1-i} = \tau - t,$$

par conséquent

(42) $$\xi = x\left\{1 - (i-1)\,x^{i-1}(\tau - t)\right\}^{\frac{1}{1-i}},$$

et la puissance

$$\left\{1 - (i-1)\,x^{i-1}(\tau - t)\right\}^{\frac{1}{1-i}}$$

sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $\tau - t$, si la valeur numérique de cette différence est inférieure à celle du rapport

(48) $$\frac{1}{(i-1)\,x^{i-1}}$$

D'ailleurs il est clair que ce dernier rapport surpassera toujours, abstraction faite du signe, le rapport (39) et à plus forte raison le module, si l'on suppose $i<2$, le rapport (40) et à plus forte raison le module, si l'on suppose $i>2$. En effet on aura, dans la première hypothèse,

$$\mathrm{mod}\,\frac{1}{i-1} > 1 > \frac{1}{2^i},$$

et, dans la seconde hypothèse, $i^i > (i-1)^i$, par conséquent

$$\frac{1}{i-1} > \frac{(i-1)^{i-1}}{i^i}.$$

Donc le théorème sera vérifié à l'égard de l'équation (34); et même de ce qu'on vient de dire il résulte que, pour une équation différentielle de cette forme on obtiendra encore une limite supérieure à la valeur numérique que t peut acquérir dans la formule (30), si à l'équation (33) on substitue la suivante

(44) $$\mathrm{mod}\,(t-\tau) = \frac{\Lambda}{\Lambda\,\frac{\mathfrak{F}(x+\pi)}{\pi}}.$$

Cette remarque s'applique pareillement aux équations différentielles

$$dx = x^{-i}\,dt,\quad dx = e^{ix}\,dt,\quad dx = e^{-ix}\,dt,\ \text{etc.}\ldots$$

dont il est facile de calculer directement les intégrales.

On conclura de ce qui précède que, dans le second membre de l'équation (10) la fonction $\mathcal{R}$ renferme à la fois x et t, sous la forme qu'on a

(45) $$\mathcal{R} = \mathfrak{F}(x,t).$$

Alors l'intégrale de l'équation (10) sera fournie par la formule (22) ou (92) du § 2, c'est à dire, par l'équation

$$(46)\quad f(t) = f(x) - \int_t^{+} \Box' f(x)\,\partial t' + \int_t^{+}\int_t^{+} \Box'\Box'' f(x)\,\partial t'\partial t' - \int_t^{+}\int_t^{+}\int_t^{+} \Box'\Box''\Box''' f(x)\,\partial t'\partial t''\partial t' + \dots$$

dans laquelle on aura

$$(47)\quad \Box' f(x) = \mathcal{F}(x,t')\,f'(x),$$

et

$$(48)\quad \begin{cases} \Box'' f(x) = \mathcal{F}(x,t'')\,f'(x), \text{ et par suite} \\ \Box'\Box'' f(x) = \mathcal{F}(x,t')\,\mathcal{F}(x,t'')\,f''(x) + \mathcal{F}(x,t')\,\dfrac{\partial \mathcal{F}(x,t'')}{\partial x}\,f'(x), \end{cases}$$

et

$$(49)\quad \begin{cases} \Box''' f(x) = \mathcal{F}(x,t''')\,f'(x), \text{ et par suite} \\ \Box''\Box''' f(x) = \mathcal{F}(x,t'')\,\mathcal{F}(x,t''')\,f''(x) + \mathcal{F}(x,t'')\,\dfrac{\partial \mathcal{F}(x,t''')}{\partial x}\,f'(x), \\ \Box'\Box''\Box''' f(x) = \mathcal{F}(x,t')\,\mathcal{F}(x,t'')\,\mathcal{F}(x,t''')\,f'''(x) \\ \qquad + \mathcal{F}(x,t')\left[\mathcal{F}(x,t'')\,\dfrac{\partial \mathcal{F}(x,t''')}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathcal{F}(x,t'')}{\partial x}\,\mathcal{F}(x,t''')\right] f''(x) \\ \qquad + \mathcal{F}(x,t')\left[\mathcal{F}(x,t'')\,\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x,t''')}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \mathcal{F}(x,t'')}{\partial x}\,\dfrac{\partial \mathcal{F}(x,t''')}{\partial x}\right] f'(x), \\ \text{etc...} \end{cases}$$

D'autre part, comme dans les intégrales définies que renferme le second membre de la formule (46), les variables

$$t',\ t'',\ t''',\ \dots$$

doivent rester comprises, la première entre les limites t et τ, la seconde entre les limites t et t', la troisième entre les limites t et t'', ... il est clair que ces variables resteront toutes comprises entre les limites t et τ; d'où il suit que chacune d'elles pourra être représentée par une expression de la forme

$$t + \theta(\tau - t),$$

θ désignant un nombre renfermé entre les limites 0, 1.

Cela posé, si, la valeur de $\bar{x}$ étant toujours celle que détermine la formule (5), on représente par

$$\Lambda\, f(x+\bar{x},\ t+\theta(r-t)) \tag{50}$$

la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire $f(x+\bar{x},\ t+\theta(r-t))$ lorsque dans $\bar{x}$ on fait varier l'angle p, sans changer la valeur de r, ni celle de θ; si d'ailleurs on nomme Θ celle des valeurs de θ pour laquelle le module (50) devient le plus grand possible, et n un nombre entier quelconque, on trouvera successivement de la formule (8)

$$(51)\quad \begin{cases} \text{mod.}\ \dfrac{\partial^n f(x,t')}{\partial x^n} < (-1)^n \dfrac{\partial^n (r^{-1})}{\partial r^n}\, r\Lambda\, f(x+\bar{x},\ t+\Theta(r-t)), \\ \text{mod.}\ \dfrac{\partial^n f(x,t'')}{\partial x^n} < (-1)^n \dfrac{\partial^n (r^{-1})}{\partial r^n}\, r\Lambda\, f(x+\bar{x},\ t+\Theta(r-t)), \\ \text{mod.}\ \dfrac{\partial^n f(x,t''')}{\partial x^n} < (-1)^n \dfrac{\partial^n (r^{-1})}{\partial r^n}\, r\Lambda\, f(x+\bar{x},\ t+\Theta(r-t)), \\ \text{etc...}; \end{cases}$$

puis de ces dernières formules combinées avec les équations (47), (48), (49), ... on conclura

$$(52)\quad \begin{cases} \text{mod.}\ \square' f(x) < R_1\, r\Lambda\, f(x+\bar{x},\ t+\Theta(r-t)).\ r\Lambda\, f(x+\bar{x}), \\ \text{mod.}\ \square'\square'' f(x) < R_2 \left(r\Lambda\, f(x+\bar{x},\ t+\Theta(r-t))\right)^2 .\ r\Lambda\, f(x+\bar{x}), \\ \text{mod.}\ \square'\square''\square''' f(x) < R_3 \left(r\Lambda\, f(x+\bar{x},\ t+\Theta(r-t))\right)^3 .\ r\Lambda\, f(x+\bar{x}), \\ \text{etc...}, \end{cases}$$

$R_1, R_2, R_3, \ldots$ étant des fonctions de r qui coïncideront avec celles que fournissent les équations (17). Il ne pourrait d'ailleurs en être autrement. Car, lorsque on réduit la fonction $f(x,t)$ à $f(x)$ les formules (52) doivent coïnci-

-der avec les formules (16) ; et cela arrive effectivement, mais sous la condition que les valeurs de $R_1, R_2, R_3, \ldots$ restent les mêmes dans ces deux systèmes de formules. Donc, dans les formules (52), comme dans les formules (16), la valeur générale de R_n sera celle que fournit la formule (21), et les formules (52) donneront pour une valeur quelconque de n,

$$(53)\quad \text{mod.}\ \Box'\Box''\Box'''\ldots\Box^{(n)} f(x) < 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)\, r^{-n}\left\{\Lambda \frac{\delta(x+\bar{x}, t+\Theta(1-t))}{\bar{x}}\right\}^n \Lambda f(x+\bar{x}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(54)\quad \text{mod.}\ \Box'\Box''\Box'''\ldots\Box^{(n)} f(x) < 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)\left(\Lambda \frac{\delta(x+\bar{x}, t+\Theta(1-t))}{\bar{x}}\right)^n \Lambda f(x+\bar{x}).$$

Donc, au égard aux formules (9) du § 2, le terme général de la série comprise dans le second membre de la formule (46) offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$(55)\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left\{(1-t)\Lambda \frac{\delta(x+\bar{x}, t+\Theta(1-t))}{\bar{x}}\right\}^n \Lambda f(x+\bar{x}),$$

et à plus forte raison à celle du produit

$$(56)\quad \left\{2(1-t)\Lambda \frac{\delta(x+\bar{x}, t+\Theta(1-t))}{\bar{x}}\right\}^n \Lambda f(x+\bar{x}).$$

Donc enfin la série en question sera convergente, si l'on a

$$(57)\quad \text{mod}\left\{2(1-t)\Lambda \frac{\delta(x+\bar{x}, t+\Theta(1-t))}{\bar{x}}\right\} < 1,$$

et alors la valeur de la série réduite à ses n premiers termes offrira une valeur numérique inférieure au produit

$$(58)\quad \frac{\left\{\text{mod}\left[2(1-t)\Lambda \frac{\delta(x+\bar{x}, t+\Theta(1-t))}{\bar{x}}\right]\right\}^n}{1-\text{mod}\left[2(1-t)\Lambda \frac{\delta(x+\bar{x}, t+\Theta(1-t))}{\bar{x}}\right]} \Lambda f(x+\bar{x}).$$

Il est important d'observer que le module r de $\bar{x}$ doit être tel que chacune des fonctions

(59) $\qquad f(x+\bar{x},\ t+\theta(\bar{x},t)),\quad f(x+\bar{x},$

demeura finie et continue, quelque soit l'angle ρ, pour la valeur attribuée à ce module et pour une valeur pleine particulière. Il sera d'ailleurs avantageux de choisir ce même module de telle sorte que la limite assignée par la formule (57) à la valeur numérique de $\bar{x}-t$ soit la plus grande possible.

Si l'on pose en particulier $f(x)=x$, l'équation (46) donnera

$$(60)\qquad \xi = x - \int_{\tau}^{t} \Box' x.\,\partial t' + \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t+\tau'} \Box'\Box'' x.\,\partial t''\partial t' - \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t+\tau'}\int_{\tau}^{t+\tau'+\tau''} \Box'\Box''\Box''' x.\,\partial t'''\partial t''\partial t' + \text{etc.},$$

et la valeur de la $\bar{x}$ comprise dans le second membre de la formule (60) sera inférieure, abstraction faite du signe à

$$(61)\qquad \frac{\left[\mathrm{mod.}\left[2(\bar{x}-t)\,\Lambda\,\frac{f(x+\bar{x},\,t+\theta(\bar{x},t))}{\bar{x}}\right]\right]^{\sim}}{1-\mathrm{mod.}\left[2(\bar{x}-t)\,\Lambda\,\frac{f(x+\bar{x},\,t+\theta(\bar{x},t))}{\bar{x}}\right]}\,\Lambda\,(x+\bar{x}).$$

Cela posé, nous énoncerons la proposition suivante

2e Théorème. Supposons que la variable t et la fonction x de cette variable soient liées entre elles par l'équation différentielle

$$(62)\qquad \partial x = f(x,t)\,\partial t,$$

l'on nomme ξ une nouvelle valeur de la fonction x, correspondante à une nouvelle valeur τ de la variable t; ξ sera développable par la formule (60) en une série convergente, si la formule (57) est vérifiée, c'est à dire, si la valeur numérique de la différence $\tau-t$ est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(63)\qquad (\tau-t)\,\Lambda\,\frac{f(x+\bar{x},\,t+\theta(\bar{x},t))}{\bar{x}} = \frac{1}{2},$$

les valeurs du module r de $\bar{x}$ seront astreintes à la seule condition que la fonction

$$f(x+\bar{x},\ t+\theta(\beta-t))$$

demeure finie et continue, quel que soit l'angle ρ, pour cette valeur de r, et pour une valeur plus petite. Alors la série de la série réduite à son premier terme sera inférieure, abstraction faite du signe, au produit (6i). Alors aussi une fonction quelconque de f désignée par

$$F(f)$$

sera elle-même développable par la formule (46) en une série convergente, et le reste de cette série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (58), si le module r est astreint à la double condition que ces deux fonctions

$$f(x+\bar{x}),\quad f(x+\bar{x},\ t+\theta(\beta-t))$$

demeurent finies et continues, quel que soit l'angle ρ, pour les valeurs attribuées à ce module et pour une valeur plus petite.

Pour montrer une application des formules qu'on vient d'établir, concevons que l'équation (62) se réduise à

$$\frac{dx}{dt} = (x+t)^{\lambda} \tag{62}$$

λ désignant une quantité positive quelconque. On aura dans ce cas

$$f(x,t) = (x+t)^{\lambda}.$$

Si l'on suppose $x+t$ positif, afin que $f(x,t)$ soit réelle, et

$$t < \beta,$$

la fonction

(65) $$\mathfrak{P}\left(x+\overline{\pi},\ t+\theta(1-t)\right) = \left(x+\overline{\pi}+t+\theta(1-t)\right)^{i}$$

ne voltera continu pour $\theta = 0$, qu'autant que l'on aura

(66) $$r < x+t.$$

Alors on trouvera

(67) $$\Lambda\left\{x+\overline{\pi}+t+\theta(1-t)\right\}^{i} = \left(x+r+t+\theta(1-t)\right)^{i},$$

et, en nommant Θ la valeur de θ pour laquelle l'expression (67) devient la plus grande possible, on aura $\Theta = 1$

(68) $$\Lambda\,\frac{(x+\overline{\pi}+t+\Theta(1-t))^{i}}{\overline{\pi}} = \frac{(x+\gamma+r)^{i}}{r}.$$

La plus petite valeur que puisse acquérir cette dernière quantité, eu égard à la condition (66) sera celle qui correspond à $r = x+t$, savoir

(69) $$\frac{(2x+t+\gamma)^{i}}{x+t},$$

ou celle qui correspond à $r = \frac{x+\gamma}{i-1}$, savoir,

(70) $$\frac{i^{i}}{(i-1)^{i-1}}\,(x+\gamma)^{i-1},$$

suivant que $x+t$ sera inférieur ou supérieur à $\frac{x+\gamma}{i-1}$, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que le nombre i sera inférieur ou supérieur à l'expression

(71) $$1+\frac{x+\gamma}{x+t} = 2+\frac{\gamma-t}{x+t}.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose le nombre i inférieur à 2, il sera inférieur, à plus forte raison, à l'expression (71); et, en remplaçant dans la formule (69) le coefficient de $\gamma-t$ par le produit (69), on réduira cette formule à

$$(72) \qquad (\tau - t)(2x + t + \tau)^{i} = \frac{1}{2}(x+t).$$

L'équation (72) est évidemment vérifiée par une valeur positive de τ comprise entre les limites $\tau = t$, $\tau = \infty$, qui substituées dans le premier membre, le rendent successivement nul et infini. Il y a plus : comme on a généralement

$$\frac{(2x+t+\tau)^{i+1} - (2x+2t)^{i+1}}{i+1} = \int_{t}^{\tau} (2x+t+\tau)^{i} d\tau < (\tau - t)(2x+t+\tau)^{i},$$

il est clair que la valeur de τ propre à vérifier la formule (72) sera inférieure à celle qui vérifie la condition

$$\frac{(2x+t+\tau)^{i+1} - (2x+2t)^{i+1}}{i+1} = \frac{1}{2}(x+t),$$

c'est-à-dire à la limite

$$\tau = 2(x+t)\left\{1 + \frac{i+1}{4}\, 2^{-i}(x+t)^{-i}\right\}^{\frac{1}{i+1}} - (2x+t);$$

Donc elle sera comprise entre t et cette dernière limite, ce qui permettra de la calculer facilement pour chaque système de valeurs attribuées aux variables x et t. Or, pour toute valeur de τ inférieure à celle qui vérifie l'équation (72), mais supérieure à t, la série comprise dans le second membre de la formule (50) devient convergente, et offrira une valeur inférieure, abstraction faite du signe, à l'expression (61), ou, ce qui revient au même, à

$$(73) \qquad \frac{\left(\dfrac{2(\tau - t)(2x+t+\tau)^{i}}{x+t}\right)^{n}}{1 - \dfrac{2(\tau-t)(2x+t+\tau)^{i}}{x+t}}\,(2x+t)$$

Donc alors la formule (60) fournira l'intégrale géné-

-rale de l'équation (64), et l'on pourra dire combien de termes on doit conserver dans le second membre de cette formule, pour obtenir la valeur de τ avec un degré donné d'approximation. En conclusion substituant, quel que soit le nombre désigné par i. Toutefois, dans le cas où ce nombre devient considérable, il est avantageux de remplacer dans la formule (69) le coefficient de $i-1$, non par le produit (69), mais par le produit (70). En opérant ainsi, à la place de l'équation (72), on obtient la suivante

$$(\pi-\tau)(\pi+\tau)^{i-1} = \frac{1}{2}\,\frac{(i-1)^{i-1}}{i^i}, \tag{74}$$

que vérifie une valeur de τ inférieure à celle qui remplit la condition,

$$\frac{(\pi+\tau)^i-(\pi+t)^i}{i} = \frac{1}{2}\,\frac{(i-1)^{i-1}}{i^i},$$

par conséquent une valeur de τ inférieure à la limite

$$\tau = (\pi+t)\left\{1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{i}\right)^{i-1}(\pi+t)^{-i}\right\}^{\frac{1}{i}} - \pi.$$

La valeur de τ en question surpassera notablement, si i devient considérable, celle qui vérifierait l'équation (72); et une valeur plus petite, mais supérieure à t, servira convergente la série que représente la formule (60). Ajoutons que de la même série sera inférieure à la fraction faite de manière

$$\frac{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{i^i}{(i-1)^{i-1}}(\tau-t)(\pi+\tau)^{i-1}}{1-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{i^i}{(i-1)^{i-1}}(\tau-t)(\pi+\tau)^{i-1}}\left\{\pi+\frac{\pi+\tau}{i-1}\right\}. \tag{75}$$

L'application des principes exposés peut être facilement étendue à un système quelconque d'équations différentielles entre une variable indépendante t et des fonctions $x, y, z, \ldots$ de cette même variable. Effectivement soit

$$f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction quelconque des variables réelles ou imaginaires $x, y, z, \ldots$ soient d'ailleurs

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$$

des variables imaginaires dont les modules soient respectivement $r, r', r'', \ldots$ enfin qu'on ait

$$\bar{x} = r\alpha^{p\sqrt{-1}}, \quad \bar{y} = r'\alpha^{p'\sqrt{-1}}, \quad \bar{z} = r''\alpha^{p''\sqrt{-1}}, \ldots \tag{76}$$

$p, p', p'' \ldots$ étant des arcs réels; et supposons les modules $r, r', r'', \ldots$ choisis de manière que la fonction

$$f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)$$

reste finie et continue, quels que soient les arcs $p, p', p'', \ldots$, pour les valeurs attribuées à ces modules ou pour des valeurs plus petites. On tirera successivement de la formule (9)

$$f(x, y, z, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\bar{x}, y, z, \ldots)\,dp,$$

$$f(x+\bar{x}, y, z, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z, \ldots)\,dp',$$

$$f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)\,dp,$$

etc. ...

par conséquent

(77) $$f(x,y,z,\ldots) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots f(x+\bar{x},y+\bar{y},z+\bar{z},\ldots)\,\frac{\partial\varphi}{2\pi}\,\frac{\partial\varphi'}{2\pi}\,\frac{\partial\varphi''}{2\pi}\ldots$$

Parcillement on trouve de la formule (k), en désignant par $h, k, l, \ldots$ des nombres entiers quelconques,

(78) $$\frac{\partial^{h+k+l+\ldots} f(x,y,z,\ldots)}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l \ldots} =$$

$$\frac{1.2\ldots h}{\rho^h}\,\frac{1.2\ldots k}{\rho'^k}\,\frac{1.2\ldots l}{\rho''^l}\ldots \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots e^{-(h\varphi+k\varphi'+l\varphi''+\ldots)\sqrt{-1}}\, f(x+\bar{x},y+\bar{y},z+\bar{z},\ldots)\,\frac{\partial\varphi}{2\pi}\,\frac{\partial\varphi'}{2\pi}\,\frac{\partial\varphi''}{2\pi}\ldots$$

puis, en intégrant, suivant l'algorithme du calcul des limites, à l'aide de la caractéristique Δ et par la notation

(79) $$\Delta f(x+\bar{x},y+\bar{y},z+\bar{z},\ldots)$$

la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire

$$f(x+\bar{x},y+\bar{y},z+\bar{z},\ldots)$$

lorsque $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots$ on fait varier les angles $\varphi,\varphi',\varphi'',\ldots$ sans changer les modules $r, r', r'', \ldots$ on conclura de la formule (78)

(80) $$\text{mod.}\ \frac{\partial^{h+k+l\ldots} f(x,y,z,\ldots)}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l \ldots} < \frac{1.2\ldots h}{\rho^h}\,\frac{1.2\ldots k}{\rho'^k}\,\frac{1.2\ldots l}{\rho''^l}\ldots \Delta f(x+\bar{x},y+\bar{y},z+\bar{z},\ldots),$$

ou, ce qui revient au même,

(81) $$\text{mod.}\ \frac{\partial^{h+k+l\ldots} f(x,y,z,\ldots)}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l \ldots} < (-1)^{h+k+l\ldots}\frac{\partial^{h+k+l\ldots}(rr'r''\ldots)}{\partial r^h \partial r'^k \partial r''^l \ldots}\,\Delta f(x+\bar{x},y+\bar{y},z+\bar{z},\ldots).$$

Cela donnera la formule subsidiaire, dont même que les nombres entiers $h, k, l, \ldots$ ou quelques uns d'entre eux se réduisent à zéro. Il est facile d'en tirer une remarque importante

à faire. C'est que pour obtenir au signe près le second membre de la formule (81), il suffit de prendre

$$F(x, y, z, \ldots) = \frac{\nu\nu'\nu'' \ldots}{x y z \ldots} R, \tag{82}$$

puis d'effectuer les différentiations indiquées dans l'expression

$$\frac{\partial^{k+k'+k''+\ldots} F(x, y, z, \ldots)}{\partial x^k \partial y^{k'} \partial z^{k''} \ldots},$$

et substituer aux variables $x, y, z, \ldots$ comme si R désignait une constante ou une quantité indépendante de ces variables, sauf à placer après les différentiations effectuées,

$$R = \mathrm{N}\, F(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, \ldots) \tag{83}$$

et, hors de la fonction R,

$$x = \nu, \quad y = \nu', \quad z = \nu'', \ldots \tag{84}$$

Cauchy donne maintenant un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{X}, \quad \frac{dy}{dt} = \mathfrak{Y}, \quad \frac{dz}{dt} = \mathfrak{Z}, \ldots, \tag{85}$$

étant une fonction des seules variables $x, y, z \ldots$ on peut en dire autant des fonctions

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots$$

lorsque l'on a

$$\mathfrak{X} = \Phi(x, y, z, \ldots), \quad \mathfrak{Y} = \Psi(x, y, z, \ldots), \quad \mathfrak{Z} = \Psi(x, y, z, \ldots), \ldots, \tag{87}$$

une intégrale générale du système (87) sera fournie

par la formule (89) du § 2, c'est-à-dire, par l'équation

(88) $f(x_1, y_1, z_1, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + (t - t)\,\Box f(x, y, z, \ldots) + \frac{(t-t)^2}{1.2}\Box^2 f(x, y, z, \ldots) + \text{etc.}$

dans laquelle on aura

(89) $$\Box f(x_1, y_1, z_1, \ldots) = \Phi(x_1, y_1, z_1, \ldots)\frac{\partial f(x_1, y_1, z_1, \ldots)}{\partial x} + X(x_1, y_1, z_1, \ldots)\frac{\partial f(x_1, y_1, z_1, \ldots)}{\partial y} + \Psi(x_1, y_1, z_1, \ldots)\frac{\partial f(x_1, y_1, z_1, \ldots)}{\partial z} + \ldots$$

Cela posé, il est clair que, dans le polynome représenté par $\Box^n f(x_1, y_1, z_1, \ldots)$, un terme quelconque sera le produit de plusieurs facteurs égaux ou inégaux dont chacun coincidera soit avec l'une des fonctions

(90) $f(x, y, z, \ldots)$, $\Phi(x, y, z, \ldots)$, $X(x, y, z, \ldots)$, $\Psi(x, y, z, \ldots)$, etc.

soit avec l'une de leurs dérivées des divers ordres prises par rapport à une ou à plusieurs des variables $x, y, z, \ldots$; et, pour obtenir une limite supérieure au module de $\Box^n f(x_1, y_1, z_1, \ldots)$, il suffira évidemment de remplacer chacun des facteurs en question par une limite supérieure à son module. On y parviendra, à l'aide de la formule (81), et en substituant successivement dans cette formule, au lieu de $f(x, y, z, \ldots)$ chacune des fonctions (89). En opérant ainsi, on obtiendra pour limite supérieure au module du polynome représenté par

$$\Box^n f(x, y, z, \ldots)$$

un second polynome que nous désignerons par

$$K$$

et qui, suivant la remarque précédemment faite, se déduira facilement du premier. En effet, pour avoir, au signe près, la valeur de K, il suffira de chercher ce que devient

$$\Box^n f(x, y, z, \ldots)$$

quant on y pose, avant les différentiations relatives à $x, y, z, \ldots$

$$f(x,y,z,\ldots) = \frac{rr'r''\ldots}{xyz\ldots}\,\mathcal{R}, \tag{91}$$

$$\Phi(x,y,z,\ldots) = \frac{rr'r''\ldots}{xyz\ldots}\,\mathcal{A},\quad X(x,y,z,\ldots) = \frac{rr'r''\ldots}{xyz\ldots}\,\mathcal{B},\quad \Psi(x,y,z,\ldots) = \frac{rr'r''\ldots}{xyz\ldots}\,\mathcal{C},\ldots \tag{92}$$

puis après les différentiations

$$x = r,\quad y = r',\quad z = r'',\ \ldots$$

et

$$\mathcal{R} = \Lambda f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots), \tag{93}$$

$$\mathcal{A} = \Lambda\Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots),\quad \mathcal{B} = \Lambda X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots),\quad \mathcal{C} = \Lambda\Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots), \tag{94}$$

D'autre part, comme, en ayant égard aux formules (91) et (92), on trouvera le polynome $\Box^n f(x,y,z,\ldots)$ composé de termes tous positifs ou tous négatifs, suivant que n sera pair ou impair, il est clair qu'il suffira de multiplier par $(-1)^n$ la valeur trouvée de $\Box^n f(x,y,z,\ldots)$, pour en déduire celle de K. Si, pour abréger, on pose

$$s = \frac{rr'r''\ldots}{xyz\ldots}, \tag{95}$$

on trouvera la formule (89) jointe aux équations (92)

$$\Box f(x,y,z,\ldots) = s\left(\mathcal{A}\frac{\partial f(x,y,z,\ldots)}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial f(x,y,z,\ldots)}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial f(x,y,z,\ldots)}{\partial z} + \ldots\right). \tag{96}$$

Alors aussi la formule (91) donnera

$$f(x,y,z,\ldots) = \mathcal{R}s,$$

et l'on en conclura

$$\Box^n f(x,y,z,\ldots) = \mathcal{R}\,\Box^n s = \Lambda f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)\cdot\Box^n s.$$

Par suite on aura

$$K = \mathcal{A}_n \Lambda f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots), \tag{97}$$

pourvu que l'on désigne par $\mathcal{A}_n$ ce que devient l'expression

$$(-1)^n \Box^n s, \tag{98}$$

quand on a égard aux formules (96), (98), (99) et (94). Il reste à déterminer $\mathcal{L}_n$. Or, si l'on représente par $u, v, w, \dots$ des fonctions quelconques de $x, y, z, \dots$, on trouvera non seulement dela formule (96), mais encore dela formule (89), ou même des formules (88), (70), (85) du § 2

$$\square(u+v+w+\dots) = \square u + \square v + \square w + \dots \tag{99}$$

$$\square(uv) = u\square v + v\square u, \tag{100}$$

et dela formule (96) en particulier

$$\square s^n = -ns^{n+1}\left(\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} + \dots\right), \tag{101}$$

$$\square\left(\frac{\mathcal{A}^n}{x^n} + \frac{\mathcal{B}^n}{y^n} + \frac{\mathcal{C}^n}{z^n} + \dots\right) = -ns\left(\frac{\mathcal{A}^{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\mathcal{B}^{n+1}}{y^{n+1}} + \frac{\mathcal{C}^{n+1}}{z^{n+1}} + \dots\right). \tag{102}$$

On trouvera en conséquence

$$\left\{\begin{aligned}
&-\square s = s^2\left(\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} + \dots\right),\\
&\square^2 s = 2s^3\left(\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} + \dots\right)^2 + s^3\left(\frac{\mathcal{A}^2}{x^2} + \frac{\mathcal{B}^2}{y^2} + \frac{\mathcal{C}^2}{z^2} + \dots\right),\\
&-\square^3 s = 6s^4\left(\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} + \dots\right)^3 + 5s^4\left(\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} + \dots\right)\left(\frac{\mathcal{A}^2}{x^2} + \frac{\mathcal{B}^2}{y^2} + \frac{\mathcal{C}^2}{z^2} + \dots\right)\\
&\qquad\qquad + 2s^4\left(\frac{\mathcal{A}^3}{x^3} + \frac{\mathcal{B}^3}{y^3} + \frac{\mathcal{C}^3}{z^3} + \dots\right),\\
&\text{etc.}\dots,
\end{aligned}\right. \tag{103}$$

puis on en conclurra, en posant, hors des fonctions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$,

$$x = r,\quad y = r',\quad z = r'', \dots$$

et par suite $s = 1$,

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r'} + \frac{\mathcal{C}}{r''} + \dots,\\
\mathcal{L}_2 &= 2\left(\frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r'} + \frac{\mathcal{C}}{r''} + \dots\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{A}^2}{r^2} + \frac{\mathcal{B}^2}{r'^2} + \frac{\mathcal{C}^2}{r''^2} + \dots\right),\\
\mathcal{L}_3 &= 6\left(\frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r'} + \frac{\mathcal{C}}{r''} + \dots\right)^3 + 7\left(\frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r'} + \frac{\mathcal{C}}{r''} + \dots\right)\left(\frac{\mathcal{A}^2}{r^2} + \frac{\mathcal{B}^2}{r'^2} + \frac{\mathcal{C}^2}{r''^2} + \dots\right)\\
&\qquad + 2\left(\frac{\mathcal{A}^3}{r^3} + \frac{\mathcal{B}^3}{r'^3} + \frac{\mathcal{C}^3}{r''^3} + \dots\right),\\
&\text{etc.}\dots
\end{aligned}\right. \tag{104}$$

les valeurs de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ étant déterminées par les formu-

les (94). D'autre part, comme on aura évidemment

$$\frac{A^n}{r^n} + \frac{B^n}{r'^n} + \frac{C^n}{r''^n} + \cdots < \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r'} + \frac{C}{r''} + \cdots\right)^n, \tag{105}$$

les formules (104) donneront

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r'} + \dfrac{C}{r''} + \cdots \\ \mathcal{S}_2 < 2\left(\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r'} + \dfrac{C}{r''} + \cdots\right)^2, \\ \mathcal{S}_3 < 15\left(\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r'} + \dfrac{C}{r''} + \cdots\right)^3, \\ \text{etc...} \end{cases} \tag{106}$$

et généralement

$$\mathcal{S}_n < N\left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r'} + \frac{C}{r''} + \cdots\right)^n, \tag{107}$$

N désignant le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite

$$1,\ 2+1=3,\ 6+7+2=15,\ \text{etc...}$$

c'est à dire, la somme des coefficients numériques compris dans le second membre de la $n^{\text{ième}}$ des équations (100). Or, ces coefficients conservant les mêmes valeurs, quel que soit le nombre des variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

il suffira, pour obtenir le nombre N, de considérer le cas où les formules (95), (96) se réduisent à

$$\delta = \frac{r}{x}, \qquad \Box f(x) = A\,\delta\,\frac{\delta f(x)}{\delta x}. \tag{108}$$

Alors la $n^{\text{ième}}$ des équations (100) donnera

$$(-1)^n \Box^n \delta^n = N\,\delta^{n+1}\left(\frac{A}{\delta x}\right)^n, \tag{109}$$

et, comme on tirera directement de formule (108)

$$(-1)^n \Box^n \delta^n = 1.2.3\ldots(2n-1)\,\delta^{n+1}\left(\frac{A}{\delta x}\right)^n \tag{110}$$

on conclura des formules (109), (110) comparées entre elles

(111) $$N = 1.3.5 \dots (2n-1).$$

Cela posé, la formule (107) donnera

(112) $$\delta^n_n < 1.3.5 \dots (2n-1) \left(\frac{\nu^0}{r} + \frac{\nu^1}{r'} + \frac{\varrho}{r''} + \dots \right)^n,$$

et l'on tirera de la formule (97)

(113) $$K < 1.3.5 \dots (2n-1) \left(\frac{\nu^0}{r} + \frac{\nu^1}{r'} + \frac{\varrho}{r''} + \dots \right)^n \Lambda f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \dots),$$

les valeurs de ν^0, ν^1, ϱ, ... étant toujours celles que déterminent les formules (96). Ainsi, K, qui représente une limite supérieure au module de $\square^n f(x, y, z, \dots)$ ne pourra surpasser le second membre de la formule (113) qui représentera encore une semblable limite. Il en résulte que le terme général de la série qui constitue le second membre de l'équation (88), savoir,

(114) $$\frac{(1-t)^n}{1.2.\dots.n} \square^n f(x, y, z, \dots)$$

offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

(115) $$\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left\{ (1-t) \left(\frac{\nu^0}{r} + \frac{\nu^1}{r'} + \frac{\varrho}{r''} + \dots \right) \right\}^n \Lambda f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \dots),$$

par conséquent à celle du produit

(116) $$\left\{ 2(1-t) \left(\frac{\nu^0}{r} + \frac{\nu^1}{r'} + \frac{\varrho}{r''} + \dots \right) \right\}^n \Lambda f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \dots).$$

Donc les différents termes de la série en question offriront des valeurs numériques inférieures à celles des termes correspondants de la progression géométrique qui aurait pour terme général le produit (116). Or cette progression sera convergente, si l'on a

(117) $$\mathrm{mod} \left\{ 2(1-t) \left(\frac{\nu^0}{r} + \frac{\nu^1}{r'} + \frac{\varrho}{r''} + \dots \right) \right\} < 1,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (94),

(118) $\mod(\gamma-t) < \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\Lambda \frac{\Phi(x+\bar{x},\, y+\bar{y},\, z+\bar{z},\ldots)}{\bar{x}} + \Lambda \frac{X(x+\bar{x},\, y+\bar{y},\, z+\bar{z},\ldots)}{\bar{y}} + \Lambda \frac{\Psi(x+\bar{x},\, y+\bar{y},\, z+\bar{z},\ldots)}{\bar{z}} + \ldots}$

et alors, si l'on remplace la somme de la série par la somme de ses n premiers termes, le reste de la série, ou l'erreur commise sera inférieure, abstraction faite du signe, au reste de la progression géométrique, c'est à dire, à

(119) $$\frac{\left\{\mod\left[2(\gamma-t)\left(\frac{\alpha}{\gamma'}+\frac{\beta}{\gamma''}+\frac{\varepsilon}{\gamma'''}+\ldots\right)\right]\right\}^n}{1-\mod\left[2(\gamma-t)\left(\frac{\alpha}{\gamma'}+\frac{\beta}{\gamma''}+\frac{\varepsilon}{\gamma'''}+\ldots\right)\right]}\,\Lambda f(x+\bar{x},\, y+\bar{y},\, z+\bar{z},\ldots)$$

Si l'on suppose en particulier

$$f(x, y, z, \ldots) = x$$

la formule (88), réduite à

(120) $$\xi = x + (\gamma-t)\,\Box x + \frac{(\gamma-t)^2}{1\cdot 2}\,\Box^2 x + \frac{(\gamma-t)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\Box^3 x + \text{etc.}\ldots$$

deviendra semblable à la formule (90), et le reste de la série comprise dans le second membre offrira un module inférieur à

(121) $$\frac{\left\{\mod\left[2(\gamma-t)\left(\frac{\alpha}{\gamma'}+\frac{\beta}{\gamma''}+\frac{\varepsilon}{\gamma'''}+\ldots\right)\right]\right\}^n}{1-\mod\left[2(\gamma-t)\left(\frac{\alpha}{\gamma'}+\frac{\beta}{\gamma''}+\frac{\varepsilon}{\gamma'''}+\ldots\right)\right]}\,\Lambda(x+\bar{x}).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante

Théorème. Supposons que la variable t et des fonctions

$$x, y, z, \ldots$$

de cette variable étant liées entre elles par les équations différentielles

(122) $$\delta x = \Phi(x, y, z, \ldots)\,\delta t,\quad \delta y = X(x, y, z, \ldots)\,\delta t,\quad \delta z = \Psi(x, y, z, \ldots)\,\delta t, \ldots$$

l'on nomme

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots$$

de nouvelles valeurs de

$$x, y, z, \ldots$$

correspondantes à une nouvelle valeur t de la variable indépendante t. $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ seront développables par la formule (120) et autres semblables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la différence $t-t_0$, si la formule (118) est vérifiée, c'est à dire, si la valeur numérique de la différence $t-t_0$ est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(123)\quad t-t_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda\frac{\Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)}{\bar{x}} + \Lambda\frac{X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)}{\bar{y}} + \Lambda\frac{\Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)}{\bar{z}} + \ldots},$$

les modules $r, r', r'', \ldots$ des expressions imaginaires

$$\bar{x} = re^{p\sqrt{-1}}, \quad \bar{y} = r'e^{p'\sqrt{-1}}, \quad \bar{z} = r''e^{p''\sqrt{-1}}, \ldots$$

étant choisis de manière que les fonctions

$$(124)\quad \Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots), \ X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots), \ \Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots), \ldots$$

demeurent finies et continues, quels que soient les angles $p, p', p'', \ldots$ pour les valeurs attribuées à ces modules et pour des valeurs plus petites. Alors le reste de chaque série, réduite à ses n premiers termes, sera inférieur, abstraction faite du signe au produit (121), ou à celui qu'on en déduirait en remplaçant

$$\Lambda(x+\bar{x})$$

par l'une des quantités

$$\Lambda(y+\bar{y}), \quad \Lambda(z+\bar{z}), \ \text{etc.}\ldots$$

Alors aussi une fonction quelconque de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ désignée par

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

sera elle même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $t-t_0$

et le reste de cette série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (11g) $\cdot \delta t$, pour les valeurs attribuées aux modules r, r', r''... et pour des valeurs plus petites, la fonction $f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)$ demeure finie et continue, aussi bien que les fonctions (12b), quels que soient d'ailleurs les angles p, p', p''...

Si, dans les formules (8f), les fonctions

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots$$

renfermaient explicitement la variable t, des raisonnements pareils à ceux par lesquels nous avons établi le théorème 2, fourniraient enfin du 2e théorème célèbre que nous allons énoncer.

2e Théorème. Supposons que la variable t et les fonctions $x, y, z, \ldots$ de cette variable soient liées entre elles par les équations différentielles

$$(12f) \quad \delta x = \Phi(x, y, z, \ldots t)\,\delta t, \quad \delta y = \chi(x, y, z, \ldots t)\,\delta t, \quad \delta z = \Psi(x, y, z, \ldots t)\,\delta t, \text{ etc.}$$

l'on nomme $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ de nouvelles valeurs de $x, y, z, \ldots$ correspondantes à une nouvelle valeur τ de la variable t. Concevons d'ailleurs que $u = f(x, y, z, \ldots)$ étant une fonction quelconque de x, y, z, on pose, pour abréger

$$(12B) \quad \square u = \Phi(x, y, z, \ldots t)\frac{\partial u}{\partial x} + \chi(x, y, z, \ldots t)\frac{\partial u}{\partial y} + \Psi(x, y, z, \ldots t)\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots$$

et que l'on désigne par

$$\square' u, \quad \square'' u, \quad \square''' u, \quad \text{etc...}$$

ce que devient $\square u$ quand à la variable t on substitue d'autres variables

$t', T', \pi''', \ldots$

soient mesurés par $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ des nombres inférieurs à l'unité, et supposons les modules

$$\rho, \rho', \rho'', \ldots$$

des angles imaginaires

$$\bar{x} = \rho a^{\theta\sqrt{-1}}, \quad \bar{y} = \rho' a^{\theta'\sqrt{-1}}, \quad \bar{z} = \rho'' a^{\theta''\sqrt{-1}}, \text{ etc.}\ldots$$

choisis de manière que chacune des fonctions

$$\begin{cases} \Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots t+\theta(\tau-t)), \\ X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots t+\theta'(\tau-t)), \\ \Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots t+\theta''(\tau-t)), \\ \text{etc.}\ldots \end{cases} \tag{117}$$

devienne finie et continue, quelle que soient les angles $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ pour des valeurs attribuées à ces modules et pour des valeurs plus petites. Puis posons

$$\begin{cases} \omega = \Lambda \Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots t+\Theta(\tau-t)), \\ \omega' = \Lambda X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots t+\Theta'(\tau-t)), \\ \omega'' = \Lambda \Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots t+\Theta''(\tau-t)), \\ \text{etc.}\ldots \end{cases} \tag{118}$$

Λ indiquant, suivant la notation du calcul des limites, le plus grand module que puisse acquérir chaque fonction quand on fait varier les angles $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ sans changer $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ et

$$\Theta, \Theta', \Theta'', \ldots$$

représentant les valeurs qu'il faut attribuer à

$$\theta, \theta', \theta'', \ldots$$

pour que chaque module devienne le plus grand possible.

$\xi, \eta, \zeta, \ldots$

seront développables en séries convergentes par la formule

$$\xi = x - \int_\tau^{t} \square' n \cdot dt' + \int_\tau^{t}\int_\tau^{t+t'} \square' \square'' n \cdot dt' dt'' - \int_\tau^{t}\int_\tau^{t+t'}\int_\tau^{t+t'+t''} \square' \square'' \square''' n \cdot dt' dt'' dt''' + \ldots, \quad (129)$$

et auront semblables, si la valeur numérique de $t-\tau$ est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(t-\tau)\left(\frac{A}{r'} + \frac{B}{r''} + \frac{C}{r'''} + \ldots\right) = \frac{1}{2}. \quad (130)$$

Alors le reste de chaque série réduite à son n premier terme sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (124), ou à celui qu'on en déduirait en remplaçant

$$N(x+\bar{x})$$

par l'une des quantités

$$N(y+\bar{y}),\ N(z+\bar{z}),\ \text{etc.},$$

les valeurs de $A, B, C, \ldots$ étant toujours déterminées par les équations (128). Alors aussi la fonction

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

sera elle-même développable en série convergente par la formule

$$f(\xi,\eta,\zeta,\ldots) = f(x,y,z,\ldots) - \int_\tau^{t} \square' f(x,y,z,\ldots)\, dt' + \int_\tau^{t}\int_\tau^{t+t'} \square' \square'' f(x,y,z,\ldots)\, dt' dt'' - \ldots, \quad (131)$$

et le reste de cette dernière série sera inférieur, abstraction faite du signe exprimé (119), si pour les valeurs attribuées aux modules $r, r', r'', \ldots$ ou pour des valeurs plus petites, la fonction

$$f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \ldots)$$

demeure fini et continue ainsi bien que les fonctions (127), quels que soient d'ailleurs les angles $p_1, p_1', p_1'', \ldots$

Dans l'application des théorèmes I et II, il est avantageux de choisir les modules $r_1, r_1', r_1'', \ldots$ de telle sorte que la limite assignée au module des $t_1 t_1'$ et déterminée par la formule (123) ou (130) soit la plus grande possible.

Les principes à l'aide desquels nous avons établi le théorème fondamental exigent le moyen de fixer des limites supérieures aux valeurs numériques que peuvent acquérir les quantités représentées par $t_1 t$ et par $s_1 r$ dans les formules (171) et (186) du § 2, tant que les séries comprises dans ces formules cessent d'être convergentes, ainsi que des limites supérieures aux restes de ces mêmes séries. On obtiendrait alors de nouveaux théorèmes entièrement semblables au théorème I. Ajoutons que ces nouveaux théorèmes, comme ceux que nous avons ici énoncés, peuvent être facilement étendus au cas où les variables et les fonctions comprises dans les équations différentielles données deviendraient imaginaires.

En résumé les formules qui précèdent transforment en une théorie complètement rigoureuse l'intégration par séries d'un système quelconque d'équations différentielles. Il résulte d'une communication faite par M. Libri en 1831, si je ne me trompe,

à l'Académie des Sciences, que, dans le cas où le système serait réduit à une équation différentielle entre deux variables x, y, l'intégrale générale peut être obtenue sous forme finie à l'aide d'une formule qui renferme une intégrale définie. J'ignore si le Mémoire qui devait contenir la démonstration de cette formule a été lu à l'Académie, et si l'auteur a pu étendre la même formule à un système quelconque d'équations différentielles.

Dans de nouveaux Mémoires, j'ai cherché comment on peut déduire du calcul des limites d'autres méthodes analogues à celle que je venais d'exposer, et comme elles propres à fournir des règles sûres pour la convergence des séries qui représentent les intégrales des équations différentielles, ainsi que des limites des erreurs que l'on commet en arrêtant ces mêmes séries. J'établirai d'ailleurs de nouveaux théorèmes relatifs à la détermination des quantités que j'ai désignées à l'aide de la caractéristique Δ. Puis j'appliquerai la méthode exposée et les théorèmes énoncés en particulier à l'intégration des équations différentielles qui expriment les mouvements simultanés des astres dont se compose notre système planétaire.

Prague 1835.

Augustin Cauchy

Utrecht, Adrad, le 9 oct. 1895

Monsieur et Digne ami,

Le désir d'abréger les calculs que réclamait la détermination numérique des constantes arbitraires, dans les problèmes de physique mathématique, et spécialement dans la théorie de la dispersion de la lumière, m'a conduit à la formule d'interpolation que renferme la note ci-jointe.

Veuillez, je vous prie, en agréer

A M. le Prof. Chev. Georges Bidone, à Turin.

un exemplaire comme un témoignage particulier de ma reconnaissance pour toutes les bontés que vous avez eues pour moi durant mon séjour à Turin. Agréez aussi la nouvelle expression de la considération distinguée et dévouée et inviolable attachement avec lesquels j'ai l'honneur d'être

votre tout dévoué

Auguste Comte